高等数学 I

第五章 定积分

# 第四节 反常积分(广义积分)

## 主要内容

一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

## 一、无穷限的反常(广义)积分

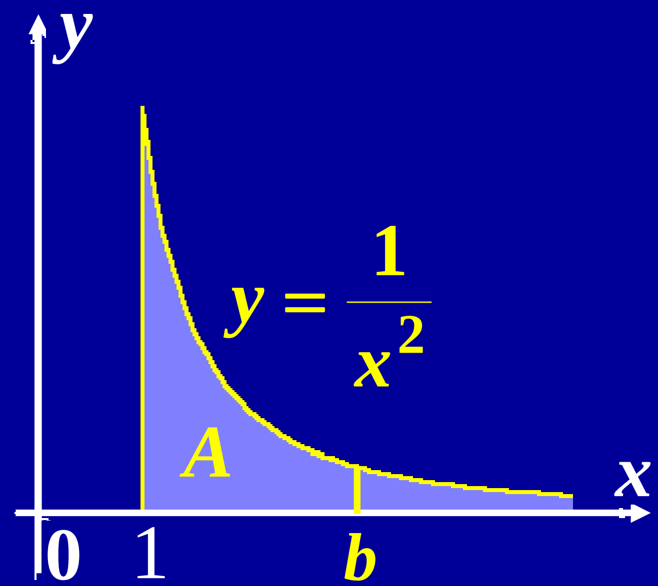
引例 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 $x$ 轴所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1.$$



**定义1** 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 取 $b>a$, 若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在, 则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限**反常积分**, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**; 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**.

类似地, 设 $f(x)\in C(-\infty,b]$, 则定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $c$ 为任意取定的常数.

只要极限中有一个不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

注 反常积分也称为广义积分.

无穷限的反常积分也称为第一类反常积分，

或称为无穷区间上的反常积分.

# 计算方法

若$F(x)$是$f(x)$的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{b\to+\infty}F(b);\quad F(-\infty)=\lim_{a\to-\infty}F(a)$$

则有类似牛顿－莱布尼兹公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

**例1** 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{d}\, x$.

**解** $\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{d}\, x = -\cos x \Big|_0^{+\infty}$

$$= -\lim_{b \to +\infty} \cos x \Big|_0^{b} = \lim_{b \to +\infty} (1 - \cos b),$$ 极限不存在，

所以该反常积分发散.

**例2** 证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ (其中 $a>0$) 当 $p>1$ 时收敛, $p\leqslant 1$ 时发散.

**证** (1) 当 $p=1$ 时有 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$;

(2) 当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 反常积分收敛, 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\leqslant 1$ 时, 反常积分发散.

例3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t e^{-pt}\,\mathrm{d}t\ (p>0)$.

解 原式 $= -\int_0^{+\infty} \frac{1}{p} t\,\mathrm{d}e^{-pt} = -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$$= 0 - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}.$$

---

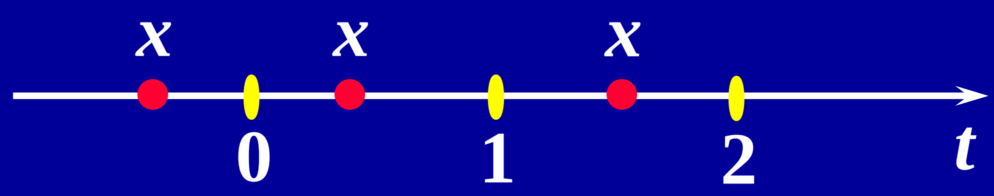
$$\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty}\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{p}(be^{-pb}-0)$$

$\boxed{0\cdot\infty型}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{b}{pe^{pb}} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{p^2e^{pb}} = 0.$$

**例4** 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

**解** 自算




(1) 当 $x<0$ 时.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0.$$

(2) 当 $0\le x<1$ 时. $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}$.

(3) 当 $1\le x<2$ 时.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1} t\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{x}{2}.$$

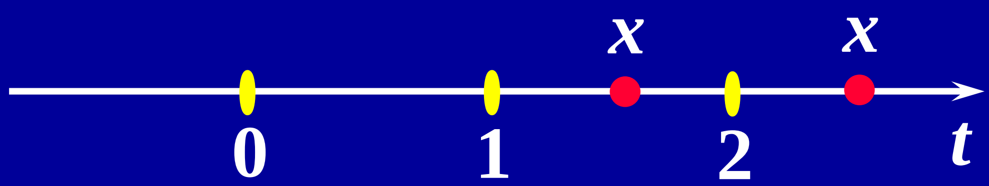
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 当 $x<0$ 时，$F(x)=0$.

(2) 当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

(3) 当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=\dfrac{1}{2}x$.

(4) 当 $x\ge 2$ 时.




$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}t\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}t+\int_{2}^{x}0\,\mathrm{d}t=1.$$

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/2, & 0\le x<1 \\ x/2, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}t\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}t+\int_{2}^{+\infty}0\,\mathrm{d}t=1.$

## 二、无界函数的反常积分

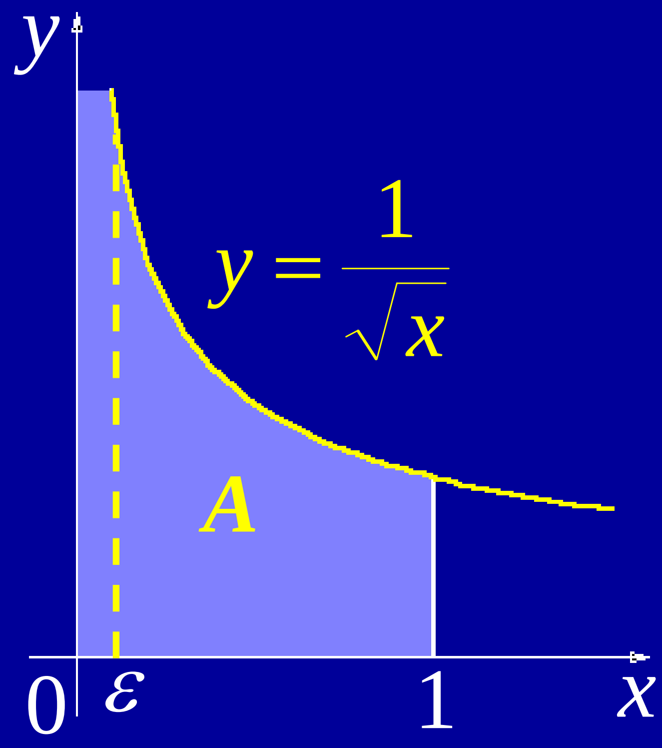
**引例** 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $x$ 轴, $y$ 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2.$$



**定义2** 设 $f(x)\in C(a,b]$，而在点 $a$ 的右邻域内无界，若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

类似地，若 $f(x)\in C[a,b)$，而在 $b$ 的左邻域内无界，则定义 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，而在点 $c$ 的任意邻域内无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

如果上述极限中有一个不存在，则称该反常积分发散.

无界函数的积分又称作**第二类反常积分**，无界点常称为**瑕点(奇点)**，无界函数的积分也称作瑕积分.

**说明** 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点，则本质上是常义积分，而不是反常积分.

例如，$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x+1)\mathrm{d}x=2.$

# 计算方法

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛顿 – 莱布尼兹公式的计算表达式：

若 $b$ 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b^-) - F(a)$

若 $a$ 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a^+)$

若 $a, b$ 都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b^-) - F(a^+)$$

注意　若瑕点 $c \in (a, b)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b f(x)\mathrm{d}x}$$

$$= F(b) - \underbrace{F(c^+) + F(c^-)}_{\text{可相消吗?}} - F(a)$$

例5　计算反常积分$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解　显然瑕点为$a$, 所以

$$原式 = [\arcsin\frac{x}{a}]\Big|_0^a = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

**例6** 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

**解** 下述解法是否正确?

$\because \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \cancel{=} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1=-2$, 所以积分收敛.

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0} + [-\frac{1}{x}]\Big|_{0}^{1},$$

因为 $[-\frac{1}{x}]\Big|_{-1}^{0} = \infty$, 所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散.

例7 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x.$

解 $\because x=0$ 与 $x=2$ 为无穷间断点，故 $I$ 为反常积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\because\ \int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\arctan f(x)+C$$

$$\therefore\ I=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0}+\left[\arctan f(x)\right]_{0}^{2}+\left[\arctan f(x)\right]_{2}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}-0+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi.$$

**例8** 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$, 并求其值.

**解** (1) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, $x: 0\to+\infty$, $t: +\infty\to 0$,

左边 $=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

$=$ 右边.

**例8** 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$, 并求其值.

**(2)** 求值:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{2\sqrt{2}}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

# 内容小结

## 一、无穷限的反常(广义)积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

## 二、无界函数的反常积分

若 $b$ 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b^-) - F(a)$

若 $a$ 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a^+)$

若 $a, b$ 都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b^-) - F(a^+)$$

**注意** 若瑕点 $c \in (a, b)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$= F(b) - F(c^+) + F(c^-) - F(a)$$

# 作 业

习题5-4　1(2,3,4,6,8,9,10); 2; 3.

总习题四　11; 14; 16; 17; 18; 20.

## 下次课内容

积分小结

**T1.** 求由 $\int_0^y e^t \mathrm{d}t + \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t = 0$ 所决定的隐函数对 $x$ 的导数.

**解** 对 $x$ 求导: $e^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos x = 0,$

由此解得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\cos x}{e^y}.$

**T2.** 当 $x$ 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 有极值?

**解** $I'(x)=xe^{-x^2}$，令 $I'(x)=0$，解得 $x=0$，且无不可导点.

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $I'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $I(x)$ | $\searrow$ | 连续 | $\nearrow$ |

由上表可知，当 $x=0$ 时 $I(x)$ 取得极小值.

T3. 求下列极限：(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$. $\boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{xe^{2x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}$ $\boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=2.$

**定理 1** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可导. 若在开区间 $(a,b)$ 内 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调递增(减).

**注** 如果把闭区间$[a,b]$换成其它区间, 有类似结论.

---

## 补充：函数广义单调性的定义和判定法

$f(x)$在$I$广义增：在 $I$ 上任取 $x_1<x_2$, $f(x_1)\le f(x_2)$.

$f(x)$在$I$广义减：在 $I$ 上任取 $x_1<x_2$, $f(x_1)\ge f(x_2)$.

**定理 1'** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可导. 若在开区间 $(a,b)$ 内 $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$), 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上广义增 (减).

**注** 如果把闭区间$[a,b]$换成其它区间, 有类似结论.

**T4.** 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且

$$f'(x)\le 0,\ F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

证明在 $(a,b)$ 内有 $F'(x)\le 0$.

**证** 
$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_a^x \mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\frac{\int_a^x [f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

其中 $x\in(a,b)$. $\because f(x)$在 $[a,b]$ 连续，在$(a,b)$ 可导，且 $f'(x)\le 0$, $\therefore f(x)$在$[a,b]$为广义减函数， $f(x)\le f(t)$,

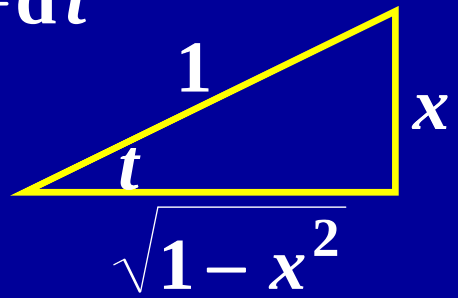
故$\int_a^x [f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t\le 0$, 从而$F'(x)\le 0$.

**T5.** 求下列不定积分 (40) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

**解** 令 $x=\sin t$，$\mathrm{d}\,x=\cos t\,\mathrm{d}\,t$，

$$原式=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}\,t}{\sin t+\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\cos t+\sin t-\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}\,t$$




$$=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)+C$$

$$=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|)+C.$$

**T6.** 求下列定积分 (19) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}\,x$.

**解** 原式 $=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,\mathrm{d}\,x$

对称区间
偶倍奇零

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}\,x$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}\,x=-2\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2\cdot\frac{2}{3}\cos^{3/2}x\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{4}{3}.$$

**T7.** 求下列定积分(20) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

**解** $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\left(\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}-\cos x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$=2\sqrt{2}.$$