高等数学 I
第四章 不定积分

第四节 有理函数的积分

主要内容

一、简单有理函数的积分
二、一般有理函数的积分
三、不定积分的若干杂例

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、简单有理函数的积分

1. $\int \frac{A}{x-a} \mathrm{d}x = A \ln |x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n} \mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

一、简单有理函数的积分

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \quad (p^2-4q<0)$

例1 求 $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$.

基本方法:
凑微 + 配方

解 原式 $=\frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x+2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5}+2\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+\arctan\frac{x-1}{2}+C.$$

例2 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解 自算

$$原式 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x \quad (p^2-4q<0,\ n\neq 1)$

例3 求 $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-4}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2}-2\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{[(x+1)^2+2^2]^2}$$

$$=\frac{-1}{2(x^2+2x+5)}-2I_2$$

下面求 $I_2=\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{[(x+1)^2+2^2]^2}$.

例3 $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2(x^2+2x+5)} - 2I_2$

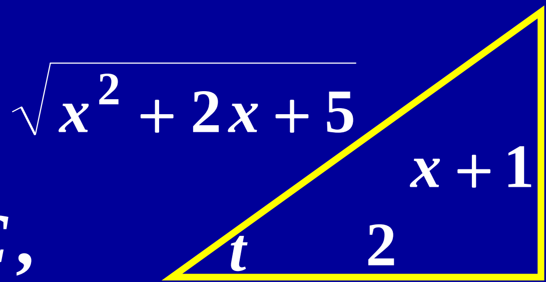
解 令 $x+1 = 2\tan t$，$\mathrm{d}(x+1) = 2\sec^2 t\,\mathrm{d}t$,

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{[(x+1)^2+2^2]^2} = \frac{1}{8}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

凑微 + 配方
+ 三角代换

$$= \frac{t}{16} + \frac{\sin t \cos t}{16} + C$$

$$= \frac{1}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + \frac{1}{16}\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} + C,$$



$$\therefore 原式 = \frac{-1}{2(x^2+2x+5)} - \frac{1}{8}\arctan\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+5} + C_1.$$

二、一般有理函数的积分

有理函数：$R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$m\le n$ 时，$R(x)$ 称为假分式；$m>n$ 时，$R(x)$ 称为真分式.

有理函数 $\overset{}{\underset{\text{相除}}{=\!=\!=}}$ 多项式 + 真分式

真分式 —分解→ 若干简单分式之和

其中简单分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0).$$

有理函数: $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$m\le n$时, $R(x)$称为假分式; $m>n$时, $R(x)$称为真分式.

定理1 多项式

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

可以分解为一次因式和二次因式的乘积，即

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-c)^{\gamma}$$
$$\cdot(x^2+px+q)^{\lambda}\ \cdots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

其中 $p^2-4q<0$, $\cdots$, $r^2-4s<0$.

定理2 设 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

是真分式, 则

$$R(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

$$+\cdots+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma}$$

$$+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{P_\lambda x+Q_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}$$

$$+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x-c)^\gamma\cdot(x^2+px+q)^\lambda\cdots(x^2+rx+s)^\mu$$

例4 求 $\int \frac{x^3+3x^2+12x+11}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x$

解 原式 $=\int \frac{x^3+2x^2+10x+x^2+2x+10+1}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x$

$$=\int (x+1+\frac{1}{x^2+2x+10})\mathrm{d}x$$

$$=\int (x+1+\frac{1}{(x+1)^2+3^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3}+C.$$

例5 求 $\int \frac{x+5}{(x+2)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

解 被积函数 $\frac{x+5}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$,

$\Rightarrow x+5 = a(x^2+x+1) + (bx+c)(x+2)$

令 $x=-2$, 得 $a=1$;

令 $x=0$, 得 $c=2$;

令 $x=1$, 得 $b=-1$;

被积函数 $\frac{x+5}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{-x+2}{x^2+x+1}$,

例5 求 $\int \frac{x+5}{(x+2)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$

解 被积函数 $\frac{x+5}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{-x+2}{x^2+x+1}$

$$原式 = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{-x+2}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{-2x-1+5}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+1/2)}{(x+1/2)^2+3/4}$$

$$= \ln\frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

例6 求 $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

解 $\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow x-5=a(x-2)^2+b(x+1)(x-2)+c(x+1)$

令 $x=2$, 令 $x=-1$, 令 $x=0$,

得 $c=-1$; 得 $a=-\frac{2}{3}$; 得 $b=\frac{2}{3}$;

原式 $=\int[-\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}]\mathrm{d}x$

$=\frac{-2}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C$.

例7 将 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ 分解为简单分式之和.

解 自算

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

例8 求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解 自算 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

$\therefore$ 原式 $= \frac{2}{5}\int \frac{d(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

说明: 将有理函数分解为简单分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此，要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例9 求 $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解 $I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C.$$

例10 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C.$$

三、不定积分的若干杂例

例11 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

解 原式 $\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C\ (x\neq 0).$$

注意本题技巧
按常规方法较繁

例12 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

分母次数较高,
宜使用**倒代换.**

解 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{t^6+t^4-t^4-t^2+t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C.$$

例13 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$,

原式 $=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C.$$

例14 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

例14 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x.$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$,

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

解(续) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

内容小结

有理函数: $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$m\le n$ 时, $R(x)$ 称为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$ 称为真分式.

有理函数 $\overset{}{\underset{\text{相除}}{=\!=\!=}}$ 多项式 + 真分式

真分式 —分解→ 若干简单分式之和

其中简单分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0).$$

有理函数: $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$m\le n$时, $R(x)$称为假分式; $m>n$时, $R(x)$称为真分式.

定理1 多项式

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

可以分解为一次因式和二次因式的乘积, 即

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-c)^{\gamma}$$

$$\cdot(x^2+px+q)^{\lambda}\ \cdots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

其中 $p^2-4q<0,\ \cdots,\ r^2-4s<0.$

定理 2 设 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

是真分式，则

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-c)^{\gamma}\cdot(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$$

$$R(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

$$+\cdots+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma}$$

$$+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{P_\lambda x+Q_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}$$

$$+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

注 对于$\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$,

可以考虑“万能公式”:

令$t = \tan\frac{x}{2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

作 业

习题4-4 2; 3; 6; 7; 8; 9; 11; 17; 18; 20; 21; 23.

总习题四 1; 4; 5; 6; 7; 9; 10.

下次课内容

第五章第四节 反常积分

T1. 求下列不定积分

(29) $\displaystyle\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (30) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x$;

解 (29) $$\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}\,2\arccos x$$

$$= -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C.$$

(30) $$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x} = (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

T1. 求下列不定积分

(32) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$； (33) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$；

解 (32) 注意到 $(x\ln x)' = 1+\ln x$，

$$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x}+C.$$

(33) $$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}\mathrm{d}\tan x = \int \ln\tan x\,\mathrm{d}\ln\tan x$$

$$= \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C.$$

T2. 由定积分的几何意义说明下列等式

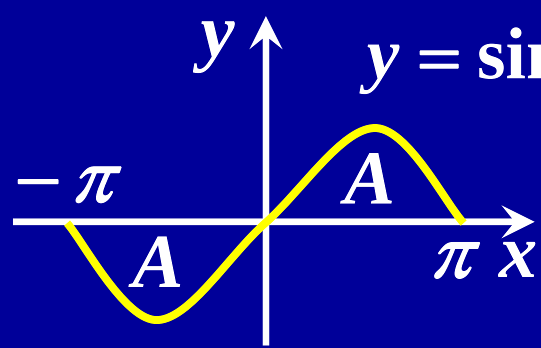
(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$

解 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\sin x$ 及 x 轴从 $x=-\pi$ 到 $x=\pi$ 一段所围成图形面积的代数和.

由于 $y=\sin x$ 为奇函数,

它的图形关于原点对称,

即原点两侧面积相等,



所以 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = -A + A = 0.$

T3. 估计下列各积分的值. (3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解 令 $f(x)=x\arctan x,\ x\in[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$.

$\because\ f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0,\ x\in[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$,

$\therefore\ f(x)$ 在 $[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$ 上单调增加,

最大最小值分别为 $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi,\ f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$,

又因为 $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3-1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$\therefore\ \frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x\le\frac{2}{3}\pi$.