高等数学 I

第四章 不定积分 第五章 定积分

分部积分法

主要内容

1. 不定积分的分部积分法
2. 定积分的分部积分法

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

高等数学 I

第四章 不定积分

第三节 分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得 $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$

或 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ 分部积分公式

$\int v\,u'\,\mathrm{d}x$

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

例1 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\int v\,u'\,\mathrm{d}x$$

解 原式 $=\int x\,\mathrm{d}\sin x$

$$= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

思考 如何求 $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$?

提示 原式 $=-\int x^2\,\mathrm{d}\cos x$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$$

例2 求$\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\int v\,u'\,\mathrm{d}x$$

解 原式 $= \dfrac{1}{2}\int \ln x\,\mathrm{d}\,x^2$

$= \dfrac{1}{2}[x^2\ln x - \int x\,\mathrm{d}x]$

$= \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C.$

解题技巧 选取 u 及 v 的一般方法：

把被积函数视为两个函数之积，按 **"反对幂三指"** 的顺序，前者为 u 后者为 v'.

- **反**: 反三角函数
- **对**: 对数函数
- **幂**: 幂函数
- **三**: 三角函数
- **指**: 指数函数

例3 求 $\int \arcsin x \cdot 1 \, \mathrm{d}x$.

解 原式 $= x\arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

反对幂三指

例4 求 $\int x \arctan x \, dx$.

解 自算

$$原式 = \frac{1}{2}\int \arctan x \, dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

$\boxed{\text{反对幂三指}}$

例5 求 $\int e^x \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \sin 2x \, \mathrm{d}e^x$

$$= e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x$$

$$= e^x \sin 2x - 2\int \cos 2x \, \mathrm{d}e^x$$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x \, \mathrm{d}x$$

故 原式 $= \dfrac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2\cos 2x) + C$.

反对幂三指

例6 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解 原式 $= \int \ln\cos x\,\mathrm{d}\tan x$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x - \int \tan x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x + \tan x - x + C.$$

例7 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 自算

令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=2\int t e^{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int t\,\mathrm{d}e^{t}$$

$$=2(te^{t}-e^{t})+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

例8 求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 $\int \underline{\sqrt{x^2+a^2}}\,\underline{\mathrm{d}x} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C_1,$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$

例9 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int x \underline{f'(x)}\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= x f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= -\sin x - \frac{2\cos x}{x} + C.$$

例5 $\int e^x \sin 2x\,dx = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

类似可得 $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

例10 求 $I = \int \sin(\ln x)\,dx.$

解 令 $t = \ln x$，则 $x = e^t$, $dx = e^t\,dt$,

$$I = \int e^t \sin t\,dt,\quad \cdots,$$

$$I = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

内容小结

1. 分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x$$

1) 使用原则：v 易求出，$\int u'v\,\mathrm{d}x$ 易积分

2) 使用经验：“反对幂三指”，前 u 后 v'

2. 分部积分法基本例题

(1) $\int$(多项式)$\boxed{\text{(正余弦函数)}}$dx

(2) $\int$(多项式)$\boxed{\text{(指数函数)}}$dx

(3) $\int\boxed{\text{(多项式)}}$(对数函数)dx

(4) $\int\boxed{\text{(多项式)}}$(反三角函数)dx

(5) $\int\boxed{\text{(指数函数)}}$(正余弦函数)d$x$

反对幂三指

前 u 后 v'

v'?

注 意

(1) 熟记并能够灵活运用基本积分公式

(2) 熟记并能够灵活运用换元积分法和分部积分法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x$$

(3) 记住并会迅速算出一些基本例题

(4) 多做题积累经验

练习题

T1 求 $\int e^{2x}\sin e^x \,\mathrm{d}x$.

解 (自算) $\boxed{\text{反对幂三指}}$

原式 $=\int e^x \underline{\sin e^x}\,\mathrm{d}e^x$

$=-\int e^x \,\mathrm{d}\cos e^x$

$=-e^x\cos e^x+\int \cos e^x\,\mathrm{d}e^x$

$=-e^x\cos e^x+\sin e^x+C$.

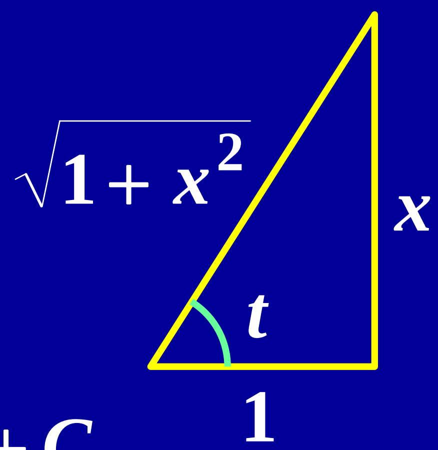
T2 求 $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$

解 令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，

$$I=\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t=\int \cos t\,\mathrm{d}e^t$$

$$=e^t\cos t+\int \sin t\,\mathrm{d}e^t$$

$$=e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t,$$



故 $I=\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C.$$

第三节 定积分的分部积分法

定理 设$u(x), v(x)$在$[a, b]$上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

证 略

例1 计算 (1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\arcsin x}_{u} \, \mathrm{d}\underbrace{x}_{v}$.

解 原式 $= x\arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例1 计算 (2) $\int_1^e \underbrace{\sin(\ln x)}_{u}\,d\underbrace{x}_{v}$.

解 原式 $=[x\sin(\ln x)]\Big|_1^e-\int_1^e \underbrace{\cos(\ln x)}_{u}\,d\underbrace{x}_{v}$

$$=e\sin 1-[x\cos(\ln x)]\Big|_1^e-\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$$

$$=e\sin 1-e\cos 1+1-\int_1^e \sin(\ln x)\,dx,$$

$$\therefore \int_1^e \sin(\ln x)\,dx=\frac{e\sin 1-e\cos 1+1}{2}.$$

注 也可以考虑令 $\ln x=t$.

例2 设 $f''(x)$在 $[0,1]$ 连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求$\int_0^1 x\, f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 x\, f''(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ (分部积分)

$$= \frac{1}{2}\left[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}[f(2) - f(0)] = 2.$$

例3 证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数},\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

证 (1) 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, $x:0\to\frac{\pi}{2}$, $t:\frac{\pi}{2}\to 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

(2) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}\cos x$

$$=[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx}$$

由此得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$,

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0, \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

$$\therefore \; I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例4 计算 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5 x\,\mathrm{d}\,x.$

解 原式 $=2\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\,\mathrm{d}\,x=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{15}.$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例5 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

解 原式 $=2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

令 $x/2=t,\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t,$

$x:\ 0\to\pi;\ t:\ 0\to\pi/2.$

$$=4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,\mathrm{d}t$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

内容小结

定理 设$u(x)$, $v(x)$在$[a,b]$上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

常用结论(可做为公式用)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数,} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数.} \end{cases}$$

作 业

习题4-3 2; 4; 6; 8; 10; 13; 15; 18; 19; 20; 21; 22; 24.

习题5-3 7(1,4,5,7,8,10,11,12,13*)

下次课内容

第四章第四节 有理函数的积分

习题解答

T1. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项．

解 设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\geq 1)$，用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

令 $f'(x)=0$，

得 $x=e$，

列表判别:

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	连续	$\searrow$

由上表可知，$x=e$处 $f(x)$ 取得最大值. 又因 $2<e<3$，且$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，故$\sqrt[3]{3}$为数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

T2. 设 $f''(x_0)$ 存在, 证明 $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

证 左边 $\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$\underset{\text{洛必达}}{\overset{\text{不能用}}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)+f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=\text{右边}.$$