第四节
正态总体均值与方差的区间估计

- 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况
- 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况
- 课堂练习
- 小结

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，并设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体的样本，$\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差 .

1. 均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) \text{或} \left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

2° σ^2 为未知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

此分布不依赖于任何未知参数

由 $$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

或 $$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

例1 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋，称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体均值 μ 的置信水平0.95为的置信区间.

解　这里 $1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, n-1=15,$

$t_{0.025}(15)=2.1315$

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=503.75,$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

于是得到μ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

即 $(500.4, 507.1)$

2. 方差 σ^2 的置信区间

由

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到σ^2的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

由

$$P\{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \frac{(n-1)S}{\sigma} < \sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到标准差σ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

例2 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋，称得重量(以克计)如下:

506 508 499 503 504 510 497 512

514 505 493 496 506 502 509 496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体标准差 σ 的置信水平0.95为的置信区间.

解 这里 $\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 15,$

$$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \quad \chi^2_{0.975}(15) = 6.262.$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2} = 6.2022.$$

于是得到 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

即 $(4.58, 9.60)$.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设已给定置信水平为 $1-\alpha$，并设 $X_1,X_2,\dots,X_{n_1}$ 是来自第一个总体的样本，$Y_1,Y_2,\dots,Y_{n_2}$ 是来自第二个总体的样本，这两个样本相互独立。且设 $\bar{X},\bar{Y}$ 分别为第一、二个总体的样本均值，S_1^2,S_2^2 为第一、二个总体的样本方差。

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

1° σ_1^2,σ_2^2 为已知

$$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}), \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

因为 X, Y 相互独立，所以 $\overline{X}, \overline{Y}$ 相互独立.

故

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

或

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

于是得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

2° $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, σ^2 为已知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$, $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

于是得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$, $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$

例3 为比较 I, II 两种型号步枪子弹的枪口速度,随机地取 I 型子弹 10 发,得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_1}=500(m/s)$, 标准差 $s_1^2=1.10(m/s)$,随机地取 II 型子弹 20 发,得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_2}=496(m/s)$, 标准差 $s_2^2=1.20(m/s)$. 假设两总体都可认为近似地服从正态分布.且生产过程可认为方差相等.求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 0.95 的置信区间.

解　依题意，可认为分别来自两总体的样本是相互独立的.又因为由假设两总体的方差相等，但数值未知，故两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $s_\omega=\sqrt{s_\omega^2}$，$s_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

这里 $\alpha/2 = 0.025, n_1 = 10, n_2 = 20, n_1 + n_2 - 2 = 28,$

$t_{0.025}(28) = 2.048.$ $\overline{x_1} = 500,$ $\overline{x_2} = 496,$ $s_\omega = 1.1688.$

故两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$的置信水平为0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1} - \overline{x_2} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = (4 \pm 0.93)$$

即 (3.07, 4.93) .

2. 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

(μ_1, μ_2 为已知)

由 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

$$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = 1-\alpha$$

即

$$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例4 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机地抽取机器 A生产的钢管18只，测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$；随机地取机器 B 生产的钢管13只，测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(mm^2)$. 设两样本相互独立，且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径分别服从正态分布 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，这里 μ_i,σ_i^2 $(i=1,2)$ 均未知. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间.

解　这里 $\alpha = 0.10, \alpha/2 = 0.05, 1-\alpha/2 = 0.95,$

$n_1 = 18, s_1^2 = 0.34, n_2 = 13, s_2^2 = 0.29.$ $F_{0.05}(17,12) = 2.59,$

$$F_{0.95}(17,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38}.$$

故两总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

即 (0.45 , 2.79) .

三、课堂练习

某单位要估计平均每天职工的总医疗费，观察了30天,其总金额的平均值是170元,标准差为30元，试决定职工每天总医疗费用平均值的区间估计（置信水平为0.95）.

解　设每天职工的总医疗费为X，则有

$$E(X)=\mu\ ,D(X)=\sigma^2$$

由中心极限定理，

$\overline{X}$近似服从正态分布 $N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

σ 未知，用样本标准差S近似代替.

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \quad \text{近似 } N(0,1) \text{ 分布}$$

使

$$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

得均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

将 $\overline{X}$=170,S=30, $u_{\alpha/2}$=1.96,n=30代入得,

μ 的置信水平为0.95的置信区间是

[159.27, 180.74]

得均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

四、小结

在本节中，我们学习了单个正态总体均值、方差的置信区间，两个正态总体均值差、方差比的置信区间．