第二节 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性
- 小结

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

样本均值是否是 μ 的一个好的估计量?

样本方差是否是 σ^2 的一个好的估计量?

这就需要讨论以下几个问题:

(1) 我们希望一个“好的”估计量具有什么特性?

(2) 怎样决定一个估计量是否比另一个估计量“好”?

(3) 如何求得合理的估计量?

估计量的评选标准

在介绍估计量的评选标准之前，我们必须强调指出：

评价一个估计量的好坏，不能仅仅依据一次试验的结果，而必须由多次试验结果来衡量 .

这是因为估计量是样本的函数, 是随机变量 . 因此，由不同的观测结果，就会求得不同的参数估计值. 因此一个好的估计，应在多次试验中体现出优良性 .

常用的几条标准是：

1．无偏性

2．有效性

3．相合性

这里我们重点介绍前面两个标准．

一、无偏性

估计量是随机变量，对于不同的样本值会得到不同的估计值．我们希望估计值在未知参数真值附近摆动，而它的期望值等于未知参数的真值. 这就导致无偏性这个标准．

设 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是未知参数θ 的估计量，若

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计．

无偏性是对估计量的一个常见而重要的要求．

无偏性的实际意义是指没有系统性的偏差．

例如，用样本均值作为总体均值的估计时，虽无法说明一次估计所产生的偏差，但这种偏差随机地在0的周围波动，对同一统计问题大量重复使用不会产生系统偏差．

例1　设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知, $X_1,X_2,\ldots X_n$ 是取自总体的一个样本，

试证 $\overline{X}$ 和 $Z=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 都是参数 θ 的无偏估计量.

证　$E(X)=\theta$，$E(\overline{X})=\theta$

所以 $\overline{X}$ 是参数 θ 的无偏估计量．而

$Z=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 具有概率密度

$$f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-nx/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

故知　$E(Z)=\dfrac{\theta}{n}$，　$E(nZ)=\theta$

即 nZ 也是参数 θ 的无偏估计量．

一个参数往往有不止一个无偏估计，若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量我们可以比较 $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ 和 $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ 的大小来决定二者谁更优．

由于 $$D(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$$
$$D(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$$

所以无偏估计以方差小者为好，这就引进了有效性这一概念．

二、有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$

都是参数 θ 的无偏估计量，若对任意 $\theta\in\Theta$，

$$D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某个 $\theta\in\Theta$ 上式中的不等号成立，

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例2 (续例1) 试证 当 $n>1$ 时 θ 的无偏估计量 $\bar{X}$ 较 $Z=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 有效.

证 $D(X)=\theta^2$,

故有 $D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\theta^2}{n}$

而 $D(Z)=\frac{\theta^2}{n^2}$, 故有 $D(nZ)=\theta^2$.

当 $n>1$ 时, $D(nZ)>D(\bar{X})$, 故$\bar{X}$ 较 nZ有效.

三、相合性

设 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$依概率收敛于 θ, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

$\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量

$\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,\ \theta\in\Theta$$

由辛钦定理

若总体 X 的数学期望 $E(X)=\mu$ 有限, 则有

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)=\mu_k \ (k=1,2,\cdots)$$

$$g(A_1,A_2,\cdots,A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

其中 g 为连续函数.

故

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$ 为 $E(X^k) = \mu_k \ (k = 1, 2, \cdots)$ 的相合估计量.

若 g 为连续函数, 则有

$g(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 为 $g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ 的相合估计量.

四、小结

对于一个未知参数可以提出不同的估计量，因此自然提出比较估计量的好坏的问题，这就需要给出评定估计量好坏的标准．

在本节中，介绍了评定估计量好坏的三个标准：无偏性、有效性、和相合性．