第四节 矩、协方差矩阵

- 原点矩 中心矩
- 协方差矩阵
- n 元正态分布的概率密度
- 小结

一、 原点矩　中心矩

定义　设X和Y是随机变量，若

$$E(X^k), k = 1,2,\cdots$$

存在，称它为X的k阶原点矩，简称 k阶矩

若 $E\{[X - E(X)]^k\}, k = 2,3,\cdots$

存在，称它为X的k阶中心矩

可见，均值 E（X）是X一阶原点矩，方差D（X）是X的二阶中心矩。

设 X 和 Y 是随机变量，若

$E(X^kY^L)$　k,L=1,2,…　存在，

称它为 X 和 Y 的 k+L 阶混合（原点）矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^L\}$ 存在，

称它为X 和 Y 的 k+L 阶混合中心矩.

可见，

协方差Cov(X,Y)是X和Y的二阶混合中心矩.

二、协方差矩阵

将二维随机变量（X1,X2）的四个二阶中心矩

$$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\}$$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\}$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}$$

排成矩阵的形式: $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

这是一个对称矩阵

称此矩阵为（X_1,X_2）的协方差矩阵.

类似定义n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差矩阵.

若 $$c_{ij}=Cov(X_i,X_j)$$
$$=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\}$$
$$(i,j=1,2,\ldots,n)$$

都存在，称

矩阵 $$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差矩阵

三、n 元正态分布的概率密度

设 $X'=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是一个n维随机向量，若它的概率密度为

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\}$$

则称 X 服从 n 元正态分布.

其中C是$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 的协方差矩阵.

$|C|$是它的行列式，C^{-1}表示C的逆矩阵，

X 和 μ是 n 维列向量，X'表示X 的转置.

n元正态分布的几条重要性质

1. $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从n元正态分布

$\Updownarrow$

对一切不全为0的实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$,

$a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$ 均服从正态分布.

2. 正态变量的线性变换不变性.

若 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 元正态分布，$Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ 是 X_j（$j=1,2,\dots,n$）的线性函数，则 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ 也服从多元正态分布.

3. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 元正态分布，则

“$X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立”

等价于

“$X_1, X_2, \dots, X_n$ 两两不相关”

例　设随机变量X和Y相互独立且$X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(0,1)$. 试求$Z=2X-Y+3$的概率密度.

解：$X\sim N(1,2), Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 独立,

故X 和Y 的联合分布为正态分布，X 和Y 的任意线性组合是正态分布.

即
$$Z\sim N(E(Z), D(Z))$$

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=2+3=5$$

$$D(Z)=4D(X)+D(Y)=8+1=9$$

$$Z \sim N(5, 3^2)$$

故 Z 的概率密度是

$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, \qquad -\infty < z < \infty$$

四、小结

在这一节中我们学习了随机变量的原点矩和中心矩以及协方差矩阵.

一般地,维随机变量的分布是不知道的,或者太复杂,以至于在数学上不易处理,因此在实际中协方差矩阵就显得重要了.