第三讲、初等积分法：恰当方程

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 知识传授：
  - 恰当方程的定义和求解方法
- 能力素质：
  - 学会用微积分求解恰当方程
  - 训练学生计算能力，以及从简单结论中发现新问题和重要现象的能力

§1.2 初等积分法

本节介绍通过初等积分法求解的几类常微分方程的解法.

恰当方程的定义

将一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

中的自变量 x 和因变量 y 看成对等的, 则可以写成对称形式:

$$f(x,y)dx - dy = 0.$$

考虑对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

其中 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 中连续.

方程 (1) 称为**恰当方程**或**全微分方程**, 如果

- 存在 Ω 上的可微函数 $\Phi(x,y)$ 使得

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (x,y) \in \Omega.$$

此时称 $\Phi(x,y) = c$ (c 为任意常数) 是方程 (1) 的**通积分**.

引导学生观察：(1) 是恰当方程的等价条件是什么？

结论很简单：等价于存在可微函数 $\Phi(x,y)$ 使得

$$\Phi_x(x,y) = P(x,y), \quad \Phi_y(x,y) = Q(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega,$$

其中 Φ_x 和 Φ_y 分别表示 Φ 关于 x 和 y 的偏导数.

尽管这个观察的结论简单，但很有意义。

引导学生进一步思考讨论：在等价条件中对 P 关于 y 求偏导，对 Q 关于 x 求偏导，

- 得到什么？
- 与微积分中的哪些概念和结论可能相联系？

这些观察、讨论和思考将对下面理解恰当方程的判定和全微分函数的构造带来很大的方便。

通积分在求解中的重要作用

在恰当方程的判定之前，首先说明通积分在求解中的重要作用

命题 3

若 $\Phi(x,y)=c$ (c 为任意常数) 是方程 (1) 在 Ω 内的**通积分**, 则 $\Phi(x,y)=c$ 的解当且仅当它是 (1) 在 Ω 中的解.

证: 必要性. (分析证明的关键：解的定义)

对于 $c \in \mathbb{R}$, 设

$$y = u(x), \quad x \in I$$

是函数方程

$$\Phi(x, y) = c$$

的解. 则有

$$\Phi(x, u(x)) \equiv c, \qquad x \in I.$$

对上式微分得

$$\begin{aligned} 0 \equiv d\Phi(x, u(x)) &= \frac{d\Phi(x, u(x))}{dx} dx = (\Phi_x(x, u(x)) + \Phi_y(x, u(x)u'(x))dx \\ &= \Phi_x(x, u(x))dx + \Phi_y(x, u(x))du(x), \end{aligned}$$

即 $y = u(x)$, $x \in I$, 是方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

即 (1) 的解.

充分性.

分析引导: 如何证明一个函数沿着解是常数?

设

$$y = u(x), \quad x \in I \ \text{ 或 } x = v(y), \quad y \in J$$

是方程 (1) 在 Ω 内的解. 不妨考虑前者, 往证

$$\Phi(x, u(x)),\ x \in I \ \text{恒等于一个常数}.$$

事实上, 因 $\Phi(x,y)$ 在 Ω 内可微, 所以

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx}(x,u(x)) &= \Phi_x(x,u(x)) + \Phi_y(x,u(x))u'(x) \\ &= P(x,u(x)) + Q(x,u(x))u'(x) \equiv 0, \quad x \in I. \end{aligned}$$

这就证明了沿着方程 (1) 在 Ω 内的任一解 $\Phi(x,y)$ 都取常值.

命题证毕.

通积分在对称形式的一阶微分方程的求解中起着如此重要的作用. 那么**问题:**

- 如何判定方程 (1) 是恰当方程?
- 如果 (1) 是恰当, 如何求通积分?

定理 4 (恰当方程的判定)

设 $P(x,y), Q(x,y)$ 及一阶偏导数 $P_y(x,y), Q_x(x,y)$ 在矩形区域 $R \subset \mathbb{R}^2$ 上连续. 则 (1) 是恰当方程当且仅当

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y), \qquad (x,y) \in R. \tag{2}$$

证: 必要性. 由假设, 存在 R 上的可微函数 $\Phi(x,y)$ 使得

$$\Phi_x(x,y)=P(x,y),\quad \Phi_y(x,y)=Q(x,y),\qquad (x,y)\in R.$$

故有

$$P_y(x,y)=\Phi_{xy}(x,y),\quad Q_x(x,y)=\Phi_{yx}(x,y),\qquad (x,y)\in R,$$

其中 $\Phi_{xy}=\dfrac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x\partial y}$, $\Phi_{yx}=\dfrac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y\partial x}$.
由假设 $\Phi_{xy}(x,y)$ 和 $\Phi_{yx}(x,y)$ 在 R 上连续, 所以

$$\Phi_{xy}(x,y)=\Phi_{yx}(x,y),\quad (x,y)\in R.$$

从而

$$P_y(x,y)=Q_x(x,y),\quad (x,y)\in R.$$

充分性. 任取 $(x_0, y_0) \in R$. 令

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt. \tag{3}$$

则 $\Phi_x = P(x,y)$. 因 $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$, 所以

$$\Phi_y(x,y) = \int_{x_0}^{x} P_y(s,y)ds + Q(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} Q_x(s,y)ds + Q(x_0,y) = Q(x,y).$$

证毕.

引导学生思考: 定理中条件所起的作用? 与微积分中线积分的联系?

- 在单连通区域 R 上, 在条件 (2) 下, 线积分

$$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy,$$

的值与积分路径无关. 因此在求 $\Phi(x,y)$ 时, 可以选取使计算尽量简单的初始点 (x_0,y_0) 和从 (x_0,y_0) 到 (x,y) 的易于计算的路径. 比如取先从 (x_0,y_0) 到 (x,y_0), 再从 (x,y_0) 到 (x,y) 的路径得到通积分

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt.$$

- 定理 4 中的矩形区域 R 可以是任何单连通的凸区域.

恰当方程的例子

判定方程

$$(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0,$$

是否是恰当方程. 如果是恰当方程, 求其通积分.

解: 令

$$P=ye^x+2e^x+y^2,\quad Q=e^x+2xy.$$

则有

$$P_y=Q_x=e^x+2y.$$

故为恰当方程.

取 $(0,0)$ 为初始点, 选取路径 $(0,0)\longrightarrow(x,0)$ 和 $(x,0)\longrightarrow(x,y)$.

则有通积分

$$\Phi(x,y)=\int_0^x P(s,0)ds+\int_0^y Q(x,t)dt=2e^x+e^xy+xy^2-2.$$

例子: 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x), \qquad a \in C^0(I), \quad I = (\alpha, \beta)$$

解: 将方程写成对称形式

$$a(x)dx - dy = 0,$$

它是恰当方程, 定义域是 $\Omega = I \times \mathbb{R}$. 任取 $(x_0, 0) \in I \times \mathbb{R}$, 对任意 $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$. 则有通积分

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(s)ds - \int_0^y ds = \int_{x_0}^{x} a(s)ds - y.$$

所以原方程的所有解是

$$y = \int_{x_0}^{x} a(s)ds + c,$$

其中 c 是任意常数.

问题: 如何求解方程

$$x\frac{dy}{dx} = -y + a(x), \qquad a \in C^0(I), \quad 0 \notin I = (\alpha, \beta), \quad r \in \mathbb{R}$$

和

$$\frac{dy}{dx} = -ry + a(x), \qquad a \in C^0(I), \quad I = (\alpha, \beta), \quad r \in \mathbb{R}$$

解: ??

如果同学有兴趣, 请查阅资料说明方程

$$\frac{dy}{dx} = -ry + a(x), \qquad a \in C^0(I), \quad I = (\alpha, \beta), \quad r \in \mathbb{R}$$

的实际应用.

附注: 恰当方程有时也可以用分项组合凑全微分的方法求解. 比如

$$
\begin{aligned}
&\left(e^x y + y^2 \cos x\right) dx + \left(e^x + 2y \sin x + y\right) dy \\
&= \left(e^x y dx + e^x dy\right) + \left(y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy\right) + y dy \\
&= d(e^x y) + d(y^2 \sin x) + d\left(\frac{1}{2} y^2\right).
\end{aligned}
$$

恰当方程的方程组表示:

若微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2, \tag{4}$$

是恰当方程, 即存在可微函数 $\Phi(x,y)$ 使得

$$d\Phi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

则微分方程 (4) 可以等价地写成两维微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \tag{5}$$

这个方程称为一个自由度的Hamilton系统.

进一步思考: 恰当方程在几何上有什么意义?

对于恰当方程 (4) 的等价方程组 (5). 令 $x_t(x_0,y_0), y_t(x_0,y_0)$, $t\in I$ 是方程组 (5) 满足初始条件

$$x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0$$

的解. 则对 $\forall V\subset\Omega$,

$$V_t=\{(x,y)\in\Omega|\ x=x_t(x_0,y_0), y=y_t(x_0,y_0), (x_0,y_0)\in V\}$$

的面积与 V 的面积相同.

问题引导: 一个不是恰当方程的方程能否可以转化为恰当方程求解？

例如：如何求解方程

$$xdy - ydx = 0$$

本讲总结

- **重点:**
  - 恰当方程的判定
  - 掌握恰当方程的判定与全微分函数的求法。
- **难点:**
  - 恰当方程积分时，积分限的确定和路径的选取。

作业： 习题一 7.1，7.2.