常 微 分 方 程

第一讲、课程的总体教学安排、常微分方程和解的定义与例子

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑地点：老图书馆数学楼 301.

时间：周三晚上6:30–8:20点

本讲教学目的与目标

- 了解常微分方程的概况与发展史，本课程的教学要求
- 常微分方程与相关课程的关系、发展动态
- 微分方程和解的定义与例子

导入课程: 常微分方程的发展史

- 阐述常微分方程的诞生的历史、与实际问题的联系，与微积分学之间关系；
- 现代常微分方程的发展、现状和展望；
- 介绍常微分方程发展进程中各个阶段的代表性人物、及其贡献。

导入课程的目的： 使学生初步了解所学知识的来源和在社会生活中的作用。激发学生的学习兴趣。

教材与参考书

教材：

- 张祥, 常微分方程, 新编讲义, 见 http://www.math.sjtu.edu.cn/course/ODEHomepage/index.asp

参考书目：

1. 丁同仁、李承治,《常微分方程》,高等教育出版社, 2005
2. Pontryagin L.S., 《Ordianry Differential Equations》(有中译本), Elsevier, San Diego, 1962.
3. Arnold V.I.,《Ordianry Differential Equations》(有中译本)，Springer-Verlag，Berlin，2006
4. Chicone C.,《Ordianry Differential Equations with Applications》，Springer-Verlag，New York，2006
5. 张锦炎、冯贝叶,《常微分方程几何理论与分支问题》(第三版), 北京大学出版社, 北京, 2002

课程要求与成绩评定：

- 学期成绩: 由平时作业、随堂测验、期中和期末考试以及创新学习奖励等成绩综合评定.
- 各部分所占比例如下：
  - 出勤+平时作业+测验 25%（训练学生对基础知识的理解和掌握, 强调作业对基础训练的重要性），
  - 期中测验 30%（考查阶段性教与学的效果, 总结经验提高后半学期教与学的效果），
  - 期末 45%（综合考察学生对整个学期所学知识体系的掌握）.
- 为鼓励学生对新知识的探究和解决困难问题的能力，对于有能力解决困难的探索问题的额外奖励不超过 5% 的加分.

答疑与辅导安排： 周三晚上 6:30–8:20

2. 切入正题：常微分方程和解的定义，及其例子

教学目的与目标

- 知识传授：
  - 常微分方程及其阶的定义
  - 解和通解的定义、区别和联系，
  - 各类方程形式的认识。
  - 通过具体的例子让学生验证什么是解和通解。
  - 通过这些具体的例子使得学生对解的唯一性、存在区间有一个初步的了解。
- 能力素质：培养学生学习常微分方程的基本思维方式和处理技巧

§1.1 常微分方程的基本概念

- 牛顿第二定律 $F = ma$ 作为引子, 通过解释 F, a 与路程的关系导入微分方程的定义.

微分方程的定义

- **微分方程**是指含有未知函数的导数的方程.
- 未知函数的自变量是单变量的微分方程称为**常微分方程**.
- 未知函数的自变量是多变量的微分方程称为**偏微分方程**.
- 微分方程含有的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**.

说明:

- 本课程主要讲授常微分方程, 作为常微分方程理论的应用, 简单介绍一些偏微分方程的求解.

常微分方程的例子

1. 方程
$$\frac{d^3y}{dx^3}+(y^5-x^6y+1)\frac{dy}{dx}=1,$$
是 3 阶常微分方程.

2. 方程
$$x^2\frac{d^4x}{dt^4}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^5=\cos x,$$
是 4 阶常微分方程.

3. Newton 第二运动定律导出的微分方程
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(x(t)),$$
是 2 阶常微分方程, 其中 m 是质点的质量, F 是 t 时刻粒子在位置 $x(t)$ 受到的作用力.

4. 方程

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}=0,$$

是 2 阶偏微分方程.

5. 方程

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+(u+1)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}-xyz\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}=u^3,$$

是 1 阶偏微分方程.

微分方程的形式

- n 阶常微分方程的一般形式是

$$F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}(t)\right) = 0, \tag{1}$$

其中 F 是关于其变量的函数, 且 F 必须含有 $\frac{d^n x}{dt^n}$.

- 因 x 关于 t 的 n 阶导数含在函数 F 之中, 所以称 (1) 为

n 阶隐式常微分方程 (简称 n 阶隐式方程)

.

- **注**:
  - 以后常用 $\dot{x}, \ddot{x}, x'(t), x''(t)$ 和 $x^{(n)}(t)$ 表示未知函数 x 关于自变量 t 的各阶导数.
  - 常微分方程中, 习惯上常用时间 t 作为自变量; 也常用 y 作为因变量, x 作为自变量等.
- n 阶显示常微分方程的一般形式是

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right), \tag{2}$$

其中 f 是关于其变量的函数. 易见, 显示常微分方程可以写成隐式常微分方程的形式.

常微分方程解、通解的定义

设函数 F 定义在 $\mathbb{R}^{n+2}$ 维空间的某开区域 Ω 上.

- 定义在 (t_1,t_2) 上的函数 $x=\phi(t)$ 称为微分方程 (1) 的解, 如果
  - $\phi(t)$ 在 (t_1,t_2) 上具有 $n-1$ 阶连续导数, 其 n 阶导数存在, 且
  -
$$\left(t,\phi(t),\phi'(t),\ldots,\phi^{(n)}(t)\right)\in\Omega,$$
$$F\left(t,\phi(t),\phi'(t),\ldots,\phi^{(n)}(t)\right)\equiv 0,\quad t\in(t_1,t_2).$$
- 称 (t_1,t_2) 为解的定义区间. 注：有可能 $t_1=-\infty$ 或 $t_2=\infty$.

解的例子:

1. $x(t) = e^{2t}$, $t \in (-\infty, \infty)$ 是一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

的解

2. $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$ 是二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,$$

的解.

注意: 例 2 中方程的解含有两个常数 c_1, c_2.

设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ 是一开区域, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

- 含有 n 个常数的函数 $x = \phi(t, \mathbf{c})$, $(t, \mathbf{c}) \in (t_1, t_2) \times \Lambda$ 称为方程 (1) 的**通解**, 如果
  - ϕ 是方程 (1) 的解, 且
  - n 个常数是任意的或独立的, 即 $\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)}$ 关于 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)})}{D(c_1, c_2, \ldots, c_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial c_1} & \frac{\partial \phi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial c_1} & \frac{\partial \phi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \phi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

  其中 $(t, \mathbf{c}) \in (t_1, t_2) \times \Lambda$.

- 方程 (1) 的不包含在通解中的解称为**特解**.

例如： 微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

有通解 $y = -(x+c)^{-1}$, 其中 c 是任意常数. 注意 x 的取值范围

又显然 $y = 0$ 也是方程的解, 但它不包含在通解之中. 称之为方程的一个特解.

常微分方程初值问题

n 阶微分方程 (1) 或 (2) 满足初始条件

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \tag{3}$$

称为**初值问题**, 其中

- $t_0 \in \mathbb{R}$ 称为初始时间,
- $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ 称为初始值或简称初值.

设问：为什么 n 阶微分方程初值问题中的初始条件是由 n 个条件确定的？

教学启发和引导： 通解和初值问题是本讲的难点和重点。

- 如何理解通解和解的联系与区别？
- 如何从通解获得初值问题的解？

部分回答:

- 当初始值 $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ 属于向量函数

$$(\phi(t,\mathbf{c}), \phi'(t,\mathbf{c}), \ldots, \phi^{(n-1)}(t,\mathbf{c})), \ (t,\mathbf{c}) \in \{t_0\} \times \Lambda$$

  的值域时, 初值问题的解包含在通解中. 这是因为利用隐函数存在定理可以解出相应的 $\mathbf{c}_0$, 从而 $\phi(t,\mathbf{c}_0)$ 就是初值问题的解. 例如 $y = ce^x$ 是微分方程 $y' = y$ 在 $\mathbb{R}$ 上的通解. 它包含了方程所有的解.

- 通解未必包含微分方程的所有解. 例如微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

  有通解 $y = -(x+c)^{-1}$, 其中 c 是任意常数. 显然 $y = 0$ 也是方程的解, 但它不包含在通解之中.

微分方程和解的例子

1. 二阶微分方程

$$x''(t) = g, \qquad g \in \mathbb{R},$$

在 $t \in \mathbb{R}$ 上有通解

$$x = \phi(t, c_1, c_2) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

2. 三阶微分方程

$$x'''(t) + x''(t) - x'(t) + 15x(t) = 0,$$

在 $t \in \mathbb{R}$ 上有通解

$$x = \phi(t, c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \cos(2t) + c_3 e^t \sin(2t),$$

其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数.

3. 设 $a(x), b(x)$ 在 $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ 上连续, $x_0\in(\alpha,\beta)$, $y_0\in\mathbb{R}$. 则一阶微分方程初值问题

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x),\quad y(x_0)=y_0,$$

在 $x\in(\alpha,\beta)$ 上有解

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-\int_{x_0}^{t}a(s)ds}dt\right).$$

4. 初值问题

$$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{3}},\quad y(1)=0,$$

在 $x\in\mathbb{R}$ 上有无穷多个解

$$y(x)=\begin{cases}0, & x\le c,\\ \pm\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>c,\end{cases}$$

其中 $c\ge 1$ 是任意常数.

5. 微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

- 满足初始条件 $y(1) = 1$ 在 $(-\infty, 2)$ 上有解 $y = (2-x)^{-1}$;
- 满足初始条件 $y(1) = -1$ 在 $(0, \infty)$ 上有解 $y = -x^{-1}$.

6. 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上有解 $y = \tan x$.

教学启发与引导:

- 例 4 中方程右端函数在 (x,y) 平面连续, 但在 $y=0$ 不可微, 初值问题有无穷多个解.
  设问：产生初值问题多解的原因何在？
  这为下节微分方程初值问题解的存在与唯一性问题的提出埋下伏笔.
- 例 5 和 6 中微分方程右端函数在 (x,y) 平面上连续可微, 但解的定义区间有很大的区别.
  设问：为什么解的定义区间有如此大的区别？
  这让学生对下节微分方程解的延拓和存在区间的概念有个初步的认识. 因为这些概念是每届学生学习的难点。

本讲总结

- 重点: 解和通解的定义；通解与初值问题的解之间的联系
- 难点: 通解与初值问题的解之间的联系。

作业： 习题一 1，2.