第二十二讲、常系数线性微分方程组：矩阵指数解与Jordan标准型求法

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 矩阵指数函数的定义与性质
- Jordan 标准型求矩阵指数函数

展望：线性齐次微分方程组的基解矩阵没有一般的解法。

- 是否有可解的特殊情况?

常系数线性微分方程组!

问题的提出

考虑常系数线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \qquad x \in J = (a,b), \tag{1}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 n 阶实常数矩阵, $\mathbf{f}(x) \in C(J)$.

设问与导引:

- 当 $n=1$ 时, 记 $\mathbf{A}=a$, 方程 (1) 对应的齐次方程有通解 $y=ce^{ax}$.
- 试想当 $n>1$ 时, 方程组 (1) 对应的齐次方程组的通解是否有类似于一阶方程的形式?
- 如果有，如何定义矩阵指数函数?

用 $\mathscr{M}$ 表示 n 阶实常数矩阵的全体构成的集合. 则

$\mathscr{M}$ 在矩阵的加法和矩阵与实数的乘法下构成一个线性空间.

对 $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathscr{M}$, 定义 $\mathbf{A}$ 的模为

$$\|\mathbf{A}\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

则矩阵的模满足下列性质：对 $\forall\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathscr{M}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

1) $\|\mathbf{A}\|\geq 0$, $\|\mathbf{A}\|=0\Longleftrightarrow\mathbf{A}=0$;
2) $\|\lambda\mathbf{A}\|=|\lambda|\|\mathbf{A}\|$, $\lambda\in\mathbb{R}$;
3) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$;
4) $\|\mathbf{AB}\|\leq\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$, $\quad\|\mathbf{A}^k\|\leq\|\mathbf{A}\|^k$, $k\in\mathbb{N}$.

证： 前 3 条性质是显然的. 下证第 4 条：对 $\mathbf{A}=(a_{ij}), \mathbf{B}=(b_{ij})$，令 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. 则 $\mathbf{AB}=(c_{ij})$. 从而

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{AB}\| &= \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{k,j=1}^{n} |b_{kj}| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|.
\end{aligned}
$$

进一步地, $\|\mathbf{A}^k\| \le \|\mathbf{A}^{k-1}\|\,\|\mathbf{A}\| \le \|\mathbf{A}\|^k$.

命题 44

对 $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{M}$, 下列结论成立:

(a) 矩阵幂级数

$$\mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k + \ldots,$$

绝对收敛. 记其为 $e^{\mathbf{A}}$ 或 $\exp(\mathbf{A})$, 称为**矩阵指数函数**;

(b) 如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可交换, 即 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则 $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$;

(c) $e^{\mathbf{A}}$ 可逆, 且 $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$;

(d) 对任意的可逆矩阵 $\mathbf{P} \in \mathscr{M}$ 有 $e^{\mathbf{PAP}^{-1}} = \mathbf{P} e^{\mathbf{A}} \mathbf{P}^{-1}$.

证: (a) 记 $a=\|\mathbf{A}\|$. 则

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\mathbf{A}^k\|}{k!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}<\infty.$$

所以矩阵幂级数绝对一致收敛, 从而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\in\mathscr{M}$, 因为上述不等式也证明了矩阵幂级数的每个分量都绝对收敛.

(b) 直接计算得

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\i\end{pmatrix}\mathbf{A}^i\mathbf{B}^{k-i}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mathbf{A}^i\mathbf{B}^{k-i}}{i!(k-i)!}=e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}},$$

其中 $\begin{pmatrix}k\\i\end{pmatrix}=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

(c) 和 (d) 的证明容易得到, 从略. 证毕.

例子: 对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda x & 0 \\ x & \lambda x \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } C_1, C_2 \text{ 是 } l, m \text{ 阶方阵}$$

- 计算 e^A 和 e^B.
- 证明

$$e^C = \begin{pmatrix} e^{C_1} & 0 \\ & e^{C_2} \end{pmatrix}$$

定理 45

(a) 矩阵指数函数 $\mathbf{Y}(x)=e^{x\mathbf{A}}$ 是常系数线性齐次方程

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx}=\mathbf{A}\mathbf{Y}, \tag{2}$$

的基解矩阵;

(b) 设 $\mathbf{f}(x)\in C(J)$, $x_0\in J$, 则常系数线性非齐次方程 (1)

- 的通解为
$$\mathbf{y}(x)=e^{x\mathbf{A}}\mathbf{c}+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s)ds,$$
其中 $\mathbf{c}$ 是任意 n 维常数向量.
- 过 $(x_0,\mathbf{y}_0)\in J\times\mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^n$ 的初值问题的解为
$$\mathbf{y}(x)=e^{(x-x_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s)ds.$$

证: (a) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 令 $I \subset \mathbb{R}$ 是以 x 为内点的一个有界开区间. 因为

$$e^{x\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \mathbf{A}^k}{k!},$$

在 I 上绝对一致收敛, 所以对矩阵指数函数逐项求导得

$$\frac{de^{x\mathbf{A}}}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}\mathbf{A}^k}{(k-1)!} = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A}\, e^{x\mathbf{A}},$$

即 $e^{x\mathbf{A}}$ 是方程 (2) 的解矩阵. 又 $e^{0\mathbf{A}} = \mathbf{E}$, 所以

$e^{x\mathbf{A}}$ 是方程 (2) 的基解矩阵.

(b) 由 (a) 和线性非齐次方程的常数变易公式立得. 证毕.

设疑: 定理 45 从理论上解决了常系数线性微分方程的求解问题.

- 对于给定的 $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$, 如何求 $e^{x\mathbf{A}}$ 有待解决?

回顾: 矩阵的Jordan标准型.

对 $\forall \mathbf{A} \in \mathscr{M}$, 由线性代数的 Jordan 标准型理论知, 存在非奇异矩阵 $\mathbf{P} \in \mathscr{M}$ 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1},$$

其中

$$\mathbf{J} = \mathrm{diag}(\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{E}_{n_i} + \mathbf{N}_i, \qquad \mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 λ_i, $i = 1, \ldots, m$, 是 $\mathbf{A}$ 的特征值, n_i 是矩阵 $\mathbf{J}_i$ 的阶数, $n_1 + \ldots + n_m = n$, $\mathbf{E}_{n_i}$ 是 n_i 阶单位矩阵.

利用 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准型得

$$e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{x\mathbf{J}}P^{-1} = \mathbf{P}\,\mathrm{diag}\left(e^{x\mathbf{J}_1},\ldots,e^{x\mathbf{J}_m}\right)\mathbf{P}^{-1}.$$

又对 $i = 1,\ldots,m$,

$$e^{x\mathbf{J}_i} = e^{x\lambda_i\mathbf{E}_{n_i}}e^{x\mathbf{N}_i} = e^{\lambda_i x}e^{x\mathbf{N}_i} = e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} & \frac{x^{n_i-3}}{(n_i-3)!} & \frac{x^{n_i-4}}{(n_i-4)!} & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} & \frac{x^{n_i-3}}{(n_i-3)!} & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}.$$

这样就从理论上解决了基解矩阵 $e^{x\mathbf{A}}$ 的求法问题.

观察分析: 讨论基解矩阵的一般形式

- $e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P}$ 仍是基解矩阵
- 具体写出矩阵 $e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{P}\,\mathrm{diag}\left(e^{x\mathbf{J}_1},\ldots,e^{x\mathbf{J}_m}\right)$ 的分量, 得出什么结论?

  答案: 方程 (2) 有基解矩阵, 其每一个列向量是由 $e^{\lambda_i x}$ 与次数不超过 $n_i - 1$ 的多项式的乘积构成的.

注： 基解矩阵的这种结构为下面寻找新的求解方法提供了思路.

例题: 求解下列常系数非齐次方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x),$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix},$$

解: 直接计算得

$$e^{x\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{2x} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & e^{-x}\exp\left(x\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & xe^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

所以由常数变易公式得到原方程的通解为

$$\mathbf{y}(x) = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{c} + \int_0^x e^{(x-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s)ds = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{c} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-e^{-x} \\ x-xe^{-x} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{c}$ 是任意 3 维常数向量.

练习: 求解下列常系数非齐次方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x \\ 0 \end{pmatrix},$$

注：尽管矩阵指数函数法解决了常系数线性微分方程基解矩阵的求法问题, 但实际计算确是非常困难的, 因为求一个矩阵的 Jordan 标准型本来就是一件十分困难的事.

下讲提供另一个易于计算的方法.

本讲重点：

- 矩阵指数函数的定义与性质，矩阵指数函数解的求法

本讲难点：

- 运用Jordan标准型具体求矩阵指数函数的解

作业： 习题四 12.2， 13， 14.