第十七讲、可积理论在偏微分方程求解中的应用

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 线性和拟线性偏微分方程的求解.

温故:

- 微分方程组函数无关的首次积分的个数;
- 首次积分之间的关系;
- 函数独立的首次积分与方程组的解之间的关系.

本讲主要阐述如下两类偏微分方程:

- 一阶齐次线性偏微分方程:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ 开区域}, \quad (1)$$

- 一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x},u), \qquad (\mathbf{x},u) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ 开区域}, \quad (2)$$

的求解问题.

分析与探讨: 如何将常微分方程组的首次积分存在性理论运用到上述偏微分方程组的求解问题.

1. 一阶齐次线性偏微分方程 (1) 解的理论

偏微分方程 (1) 对应的特征方程是

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n}. \tag{3}$$

为保证解的存在唯一性，假设

$$a_1, \ldots, a_n \in C^1(D), \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i(\mathbf{x})| > 0, \quad \mathbf{x} \in D. \tag{4}$$

则 (3) 是 $n-1$ 阶常微分方程组.

例如，当 $a_n(\mathbf{x}) \neq 0$ 时, (3) 可以写成

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

从而, 方程组 (3) 从 D 中任一点出发的解都存在唯一;

局部地有 $n-1$ 个函数独立的首次积分.

定理 34

假设 (3) 满足 (4), 且在 D 中有 $n-1$ 个函数独立的首次积分

$$\phi_1(\mathbf{x}) = c_1,\ \ldots,\ \phi_{n-1}(\mathbf{x}) = c_{n-1}.$$

则一阶线性偏微分方程 (1) 的通解为

$$u = \Psi(\phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \phi_{n-1}(\mathbf{x})),$$

其中 $\Psi(\cdot, \ldots, \cdot)$ 是任意的 $n-1$ 元连续可微的函数.

证:

由已知条件, 不妨设 $a_n \neq 0$. 则特征方程 (3) 等价于常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{5}$$

根据连续可微的首次积分的等价判定,

- $\phi(\mathbf{x})$ 是 (5) 的首次积分当且仅当 $\phi(\mathbf{x})$ 是偏微分方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_n}+\frac{a_1(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\ldots+\frac{a_{n-1}(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}=0,$$

i.e.

$$a_1(\mathbf{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\ldots+a_{n-1}(\mathbf{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}+a_n(\mathbf{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_n}=0,$$

的解.

因此求偏微分方程 (1) 的通解等价于求 (5) 的所有首次积分.

若 $\phi(\mathbf{x})$ 是 (5) 的首次积分,

$\Downarrow$ 由定理 31

存在连续可微的 $n-1$ 元函数 Ψ 使得

$$\phi(\mathbf{x})=\Psi(\phi_1(\mathbf{x}),\ldots,\phi_{n-1}(\mathbf{x})).$$

故 (1) 的通解是关于 $\phi_1(\mathbf{x}),\ldots,\phi_{n-1}(\mathbf{x})$ 的任意连续可微的函数.

证毕.

附注：

- 定理 34 中通解的表达式只是局部的.
- 一阶线性偏微分方程的通解由其特征方程的 $n-1$ 个函数独立的首次积分与一个任意的连续可微函数来表示.

例题:

1. 求下列偏微分方程的通解:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{6}$$

解: 偏微分方程 (6) 的特征方程为

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

从

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

得到特征方程的一个首次积分

$$\phi_1(x,y,z)=\frac{x}{y}.$$

将特征方程变形得

$$\frac{xdx}{x^2}=\frac{ydy}{y^2}=\frac{(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz}{-(x^2+y^2)}.$$

从而有

$$xdx+ydy+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz=0,$$

即

$$d(x^2+y^2+z^2)+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz=0.$$

这样得到特征方程的第二个首次积分

$$\phi_2(x,y,z)=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

容易验证 ϕ_1 与 ϕ_2 是函数独立. 因而偏微分方程 (6) 的通解为

$$u(x,y,z)=\psi\left(\frac{x}{y},z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$

其中 ψ 是任意连续可微的二元函数.

2. 求偏微分方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0, \tag{7}$$

通过曲面 $x=1, u=\ln z-\frac{1}{y}$ 的解.

解: 偏微分方程 (7) 的特征方程为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{z}.$$

易见

$$\phi_1(x,y,z)=y$$

是特征方程的一个首次积分.

由于特征方程的任一条积分曲线都位于首次积分的某个等势面上, 所以在等势面 $y=c_1$ 上, 从

$$\frac{dx}{y}=\frac{dz}{z},$$

解得 $$\frac{x}{c_1}=\ln z+c.$$

从而特征方程有另一个首次积分:

$$\phi_2(x,y,z) = \frac{x}{y} - \ln z,$$

它与 $\phi_1(x,y,z)$ 函数独立. 故原方程的通解为

$$u = \psi\left(y, \frac{x}{y} - \ln z\right),$$

其中 ψ 是任意连续可微函数. [如何由初始条件确定 ψ]?

由已知条件得

$$\psi\left(y, \frac{1}{y} - \ln z\right) = \ln z - \frac{1}{y}.$$

在函数 ψ 中令 $\xi = y, \eta = \frac{1}{y} - \ln z$, 则有 $y = \xi, z = e^{\frac{1}{\xi} - \eta}$. 从而函数

$$\psi(\xi, \eta) = -\eta.$$

故原方程满足给定条件的解为

$$u = -\eta = \ln z - \frac{x}{y}.$$

补充题:

1. 求下列线性偏微分方程的通解:

$$a)\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$b)\quad x(y^2-z^2)\frac{\partial u}{\partial x}-y(x^2+z^2)\frac{\partial u}{\partial y}+z(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

2. 求下列线性偏微分方程满足适当条件的解:

$$a)\quad (z-y)^2\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial z}=0,\qquad u|_{x=0}=2y(y-z).$$

2. 一阶拟线性偏微分方程 (2) 的解的理论

为讨论一阶拟线性偏微分方程 (2), 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x},u), \qquad (\mathbf{x},u) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ 开区域},$$

的解的存在性, 假设

$$a_1,\ldots,a_n,b \in C^1(G), \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i(\mathbf{x},u)| > 0, \qquad (\mathbf{x},u) \in G. \tag{8}$$

常微分方程组

$$\frac{dx_1}{a_1(\mathbf{x},u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(\mathbf{x},u)} = \frac{du}{b(\mathbf{x},u)}, \tag{9}$$

称为一阶拟线性偏微分方程的 (2) 特征方程.

定理 35

假设 (9) 满足 (8), 且在 D 中有 n 个函数独立的首次积分

$$V_1(\mathbf{x},u)=c_1,\ \ldots,\ V_n(\mathbf{x},u)=c_n.$$

则一阶拟线性偏微分方程 (2) 的通解为

$$\Psi(V_1(\mathbf{x},u),\ldots,V_n(\mathbf{x},u))=0, \tag{10}$$

其中 $\Psi(\cdot,\ldots,\cdot)$ 是任意的 n 元连续可微函数.

证: 由假设和定理 31 知, 特征方程 (9) 所有的首次积分为

$$V(\mathbf{x},u)=\Psi(V_1(\mathbf{x},u)),\ldots,V_n(\mathbf{x},u)),$$

其中 Ψ 是任意的连续可微的 n 元函数.

从定理 32 及其证明得, $V(\mathbf{x},u)$ 是线性偏微分方程

$$a_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\ldots+a_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+b(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial u}=0, \tag{11}$$

的通解.

下面首先证明从 (10) 根据隐函数存在定理确定的

函数 $u=\phi(\mathbf{x})$ 是 (2) 的解(当然要求 $\frac{\partial V}{\partial u}\neq 0$).

由隐函数方程确定的函数的导数满足

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial V}{\partial u},\quad i=1,\ldots,n.$$

将上述表达式代入 (11) 得到

$$a_1(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}))\frac{\partial \phi}{\partial x_1}+\ldots+a_n(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}))\frac{\partial \phi}{\partial x_n}=b(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x})).$$

这就证明了 $u=\phi(\mathbf{x})$ 是拟线性偏微分方程 (2) 的解.

最后证明 (2) 的任一解可以表示成 (10) 的形式.

设 $u=\psi(\mathbf{x})$ 是 (2) 的任一解. 令

$$\Phi_i(\mathbf{x})=V_i(\mathbf{x},\psi(\mathbf{x})),\qquad i=1,\ldots,n.$$

则对 $i=1,\ldots,n$ 有

$$\begin{aligned}
& a_1(\mathbf{x},\psi(\mathbf{x}))\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_1}+\ldots+a_n(\mathbf{x},\psi(\mathbf{x}))\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_n}\\
= \ & a_1\frac{\partial V_i}{\partial x_1}+\ldots+a_n\frac{\partial V_i}{\partial x_n}+\frac{\partial V_i}{\partial u}\left(a_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\ldots+a_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\\
= \ & a_1\frac{\partial V_i}{\partial x_1}+\ldots+a_n\frac{\partial V_i}{\partial x_n}+b\frac{\partial V_i}{\partial u}=0,
\end{aligned}$$

其中

- 第二个等式中用到 $\psi(\mathbf{x})$ 是 (2) 的解,
- 第三个等式中用到 $\phi_i(\mathbf{x},u)$ 是特征方程 (9) 的首次积分.

这就证明了 $\Phi_1(\mathbf{x}),\dots,\Phi_n(\mathbf{x})$ 是 $n-1$ 阶常微分方程组

$$\frac{dx_1}{a_1(\mathbf{x},\psi(\mathbf{x}))}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(\mathbf{x},\psi(\mathbf{x}))},$$

的首次积分,

因此其中的某个首次积分是其它首次积分的连续可微的函数. 不妨设

$$\Phi_n(\mathbf{x})=\Gamma(\Phi_1(\mathbf{x}),\dots,\Phi_{n-1}(\mathbf{x})),$$

其中 Γ 是连续可微的函数. 令

$$\Psi(V_1(\mathbf{x},u),\dots,V_n(\mathbf{x},u)):=V_n(\mathbf{x},u)-\Gamma(V_1(\mathbf{x},u),\dots,V_{n-1}(\mathbf{x},u)).$$

则 $u=\psi(\mathbf{x})$ 是方程

$$\Psi(V_1(\mathbf{x},u),\dots,V_n(\mathbf{x},u))=0,$$

的解. 证毕.

例题:

1. 求解偏微分方程初值问题:

$$\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y}=z,$$
$$z|_{y=1}=\cos(\omega x).$$

解: 特征方程

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z},$$

有两个函数独立的首次积分

$$\phi_1(x,y,z)=\sqrt{x}-\sqrt{y}, \qquad \phi_2(x,y,z)=2\sqrt{y}-\ln|z|.$$

故原偏微分方程的通解为

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y}-\ln|z|)=0, \tag{12}$$

其中 Φ 是任意的二元连续可微函数, 且含有第二个变元.

对函数方程 (12) 运用隐函数存在定理解得

$$2\sqrt{y}-\ln|z| = g(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

从而有

$$z = e^{2\sqrt{y}}\psi(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

利用初始条件得

$$\psi(\sqrt{x}-1) = e^{-2}\cos(\omega x).$$

故有

$$\psi(\zeta) = e^{-2}\cos(\omega(1+\zeta)^2)$$

因此原初值问题的解是

$$z = e^{2(\sqrt{y}-1)}\cos(\omega(1+\sqrt{x}-\sqrt{y})^2).$$

2. 求解一阶偏微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$$

解: 考虑特征方程

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{u+\frac{xy}{z}}.$$

易见它有两个函数独立的首次积分

$$\phi_1(x,y,z,u)=\frac{z}{x},\quad \phi_2(x,y,z,u)=\frac{y}{z}.$$

由于特征方程的积分曲线都位于等势面上, 因此求其它的函数独立的首次积分时可以将 $\frac{z}{x}$ 与 $\frac{y}{z}$ 当作常数看待.

在特征方程中, 考虑

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u+\frac{xy}{z}},$$

并令 $\frac{y}{z}=c_1$, 则有

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u + c_1.$$

这是一个关于 u 的线性微分方程, 它有通解

$$u = x(c_1 \ln|x| + c).$$

因而原特征方程有首次积分

$$\phi_3(x,y,z,u) = \frac{u}{x} - \frac{y}{z}\ln|x|.$$

容易验证 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 是函数独立. 所以原方程的通解是

$$\Phi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{z}, \frac{u}{x} - \frac{y}{z}\ln|x|\right) = 0,$$

其中 $\Phi(\xi,\eta,\zeta)$ 是任意连续可微的函数, 且 Φ_ζ 不恒等于零.

利用隐函数存在定理, 原方程的通解也可写成

$$u = x\psi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{z}\right) + \frac{xy}{z}\ln|x|,$$

其中 ψ 是任意连续可微的函数.

补充题：

1. 求下列拟线性偏微分方程的通解:

$$a)\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-x^2-y^2$$

$$b)\quad (z+y-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y-z$$

$$c)\quad (z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-e^{x+y}$$

2. 求下列线性偏微分方程满足适当条件的解:

$$a)\quad (x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz,\qquad (y^2+z^2)|_{x=a}=a^2.$$

本讲重点和难点：

- 线性和拟线性偏微分方程的通解与特征方程的首次积分的联系
- 线性和拟线性偏微分方程的通解和初值问题的解的求法

作业： 习题三 18.2，18.4，18.5，19.2，19.6，19.7