第十四讲、二阶线性微分方程的幂级数解法

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 提供一类变系数线性微分方程的一个解法

回顾：

- 线性微分方程解的理论、求解方法（常系数、变系数）
- 幂级数、及其收敛判别法

本讲再次回到二阶线性齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

设问：

- p, q 应具有怎样的性质才有可能求出其幂级数解?

定义：

- 如果 $p(x), q(x)$ 在 x_0 的某邻域解析, 称 x_0 为 (1) 的**常点**.
- 如果 $p(x)$ 或 $q(x)$ 在 x_0 不解析, 称 x_0 为 (1) **的奇点**.

首先考虑方程 (1) 在常点邻域解析解的收敛半径.

定理 56

设 $p(x), q(x)$ 在 $|x-x_0|<\rho$ 内可展成关于 $x-x_0$ 的收敛的幂级数, 则方程 (1) 在 $|x-x_0|<\rho$ 内有收敛的幂级数解

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,$$

其中 c_0, c_1 是任意常数, $c_k, k>1$ 可由递推公式通过 c_0, c_1 表示.

分析思想引导：

- 回忆高阶微分方程与方程组的关系
- 原问题转化为线性微分方程组的同样的问题
- 回忆解析微分方程组解析解存在性的证明
- 如何将解析微分方程组解析解存在性的证明合理地移植到线性微分方程组?

证: 由于线性齐次微分方程 (1) 满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \qquad\qquad y_0, y_1 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

的初值问题通过变换 $y' = z$ 可化为二阶线性齐次微分方程组

$$\begin{aligned} y' &= z, & y(x_0) = y_0, \\ z' &= -p(x)z - q(x)y, & z(x_0) = y_1, \end{aligned}$$

因此定理的证明可由下面的定理 27 得到. 证毕.

设问：常点情况下，二阶线性齐次微分方程解析解的存在性和存在区间问题都解决了。

- 奇点的邻域是否有收敛的幂级数解？

幂级数解的理论：奇点情况

考虑二阶线性齐次微分方程 (1) 在奇点邻域解析解的存在性.
如果

$$p(x) = \frac{P(x)}{x - x_0}, \quad q(x) = \frac{Q(x)}{(x - x_0)^2}, \tag{3}$$

且 $P(x), Q(x)$ 在 x_0 的某邻域可展成收敛的幂级数，$P(x_0)^2 + Q(x_0)^2 \neq 0$，称 x_0 是方程 (1) 的**正则奇点**.

例: 判定二阶线性微分方程

$$x(1-x^2)y''+xy'+x-1=0$$

和

$$x^3(1+x^2)y''+x^2y'+x-1=0$$

的奇点及其类型

定理 57

设 x_0 是方程 (1) 的正则奇点, 且 $p(x), q(x)$ 由 (3) 给出. 则方程 (1) 在 x_0 的某邻域内有收敛的广义幂级数解

$$y(x) = (x-x_0)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k, \qquad c_0 \neq 0, \tag{4}$$

其中 $c_k, k \geq 1$ 可以迭代地求出, ν 是方程 (1) 的指标方程

$$s(s-1) + P(x_0)s + Q(x_0) = 0.$$

的根 (称为指标根) 之一 (如果指标根都是实的, ν 是其中最大的一个; 如果指标根是一对共轭复数, ν 是其中的任一个).

思路分析:

- 构造形式幂级数解
- 利用优级数法证明形式解的收敛性

证:

1.确定方程 (1) 的形式解 (4).

由正则奇点的定义, 不妨设 $P(x), Q(x)$ 在 $|x-x_0|<\rho$ 内可展成收敛的幂级数

$$P(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad Q(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k. \tag{5}$$

将 (4) 和 (5) 代入方程 (1), 通过整理得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\nu)(k+\nu-1)c_k+\sum_{i=0}^{k}a_i(k-i+\nu)c_{k-i}+\sum_{i=0}^{k}b_ic_{k-i}\right](x-x_0)^k\equiv 0,$$

即对 $k=0,1,\ldots$

$$[(k+\nu)(k+\nu-1)+a_0(k+\nu)+b_0]\,c_k+\sum_{i=1}^{k}[a_i(k+\nu-i)+b_i]\,c_{k-i}=0, \tag{6}$$

其中 $c_j=0, j<0$.
从上式 $k=0$ 及 $c_0\neq 0$ 得

$$\nu(\nu-1)+a_0\nu+b_0=0.$$

它是方程 (1) 的指标方程. 设 ν_1,ν_2 是它的两个根. 如果 ν_1,ν_2 都是实数且 $\nu_1\geq\nu_2$, 或 ν_1,ν_2 是一对共轭复根, 记 $\nu_0=\nu_1$.

对 $k \geq 1$, 令

$$f(s) = s(s-1) + a_0 s + b_0, \quad g_i(s) = a_i(s-i) + b_i,\ i = 1, 2, \ldots$$

并取 $v = v_0$, 则 (6) 可写成

$$f(k+v_0)c_k + \sum_{i=1}^{k} g_i(k+v_0)c_{k-i} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

因为对 $k \geq 1$

$$\begin{aligned} f(k+v_0) &= (k+v_0)(k+v_0-1) + a_0(k+v_0) + b_0 \\ &= k(k+2v_0+a_0-1) = k(k+2v_0-v_1-v_2) \\ &= k(k+v_1-v_2) \neq 0, \end{aligned}$$

所以从方程 (7) 可以依次地求出 $c_1, c_2, \ldots$, 且它们都由 c_0 唯一地确定. 从而形式上唯一地求出了方程 (1) 的形式解 (4).

2. 证明形式解 (4) 的收敛性.

令 $\nu^* = \nu_1 - \nu_2$. 则 $\mathrm{Re}\,\nu^* \geq 0$ 且

$$f(k+\nu_0) = k(k+\nu^*) \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

由于 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的展开式 (5) 在 $|x-x_0| < \rho$ 内收敛, 所以对 $0 < \rho_1 < \rho$, $\exists M \geq 1$ 使得

$$|a_k| \leq \frac{M}{\rho_1^k}, \quad |b_k| \leq \frac{M}{\rho_1^k}, \quad |\nu_0 a_k + b_k| \leq \frac{M}{\rho_1^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

从而,

$$|c_k| \leq \left(\frac{M}{\rho_1}\right)^k |c_0|. \tag{8}$$

事实上, 对 $k = 1$

$$|c_1| = \frac{|g_1(1+\nu_0)c_0|}{|f(1+\nu_0)|} = \frac{|a_1\nu_0 + b_1|}{|1+\nu^*|}|c_0| \leq \frac{M}{\rho_1}\frac{1}{|1+\nu^*|}|c_0| \leq \frac{M}{\rho_1}|c_0|.$$

假设对 $k \le l-1,\ l \ge 2$, (8) 成立. 当 $k=l$ 时

$$
\begin{aligned}
|c_l| &= \frac{\left|\sum_{i=1}^{l} g_i(l+\nu_0)c_{l-i}\right|}{|l(l+\nu^*)|} \le \frac{\sum_{i=1}^{l} |a_i(l+\nu_0-i)+b_i|\,|c_{l-i}|}{|l(l+\nu^*)|} \\
&\le \frac{\sum_{i=1}^{l} \left(|a_i\nu_0+b_i|+|a_i|(l-i)\right)|c_{l-i}|}{l^2} \\
&\le l^{-2}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{M}{\rho_1^i}+\frac{M}{\rho_1^i}(l-i)\right)\left(\frac{M}{\rho_1}\right)^{l-i}|c_0| \\
&= l^{-2}\frac{M}{\rho_1^l}\sum_{i=1}^{l}(1+l-i)M^{l-i}|c_0| \\
&< l^{-2}\frac{M^l}{\rho_1^l}\sum_{i=1}^{l}(1+l-i)|c_0| \le \left(\frac{M}{\rho_1}\right)^l |c_0|.
\end{aligned}
$$

所以由归纳法可证得 (8).

从 (8) 式得, 方程 (1) 的形式解 (4) 在 $|x-x_0|<\dfrac{\rho_1}{M}$ 内收敛. 证毕.

例题:

1. 求 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,$$

在常点 $x=0$ 的幂级数解.

解: 根据定理 56, 当 $|x|<1$ 时, Legendre 方程有收敛的幂级数解

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k.$$

将其代入 Legendre 方程, 通过整理得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}+(n-k)(n+k+1)c_k\right]x^k\equiv 0,\quad |x|<1.$$

故有

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k, \qquad k = 0,1,\ldots$$

进一步计算得

$$c_{2m} = (-1)^m A_m c_0,\ \ c_{2m+1} = (-1)^m B_m c_1, \qquad m = 1,2,\ldots$$

其中

$$A_m = \frac{(n-2m+2)(n-2m+4)\ldots(n-2)n(n+1)(n+3)\ldots(n+2m-1)}{(2m)!},$$
$$B_m = \frac{(n-2m+1)(n-2m+3)\ldots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\ldots(n+2m)}{(2m+1)!}.$$

因此 Legendre 方程的幂级数形式的通解为

$$y(x) = c_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m A_m x^{2m}\right] + c_1 x\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m B_m x^{2m}\right],\ \ |x|<1,$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

附注:

- 当 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 时, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $m > m_0$ 时有 $A_m = 0$ 或 $B_m = 0$. 此时 Legendre 方程有一个多项式函数的解. 称之为 **Legendre 多项式**.
- $x = \pm 1$ 是 Legendre 方程的正则奇点, 它在该点的指标根都是零. 因此由定理 57 得, Legendre 在 $x = \pm 1$ 的邻域都有收敛的幂级数解.

2. 求 μ 阶 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \mu^2)y = 0, \qquad \mu \geq 0,$$

当 $2\mu \notin \mathbb{Z}$ 时在 $x = 0$ 邻域的通解.

解: 易见 $x = 0$ 是 Bessel 方程的正则奇点, 且指标方程为

$$\nu^2 - \mu^2 = 0.$$

根据定理 57, Bessel 方程在 $x = 0$ 的邻域有收敛的幂级数解, 设为

$$y(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0.$$

将其代入 Bessel 方程, 通过整理并比较 x 的同次幂的系数得

$$(k + \nu + \mu)(k + \nu - \mu)c_k + c_{k-2} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

其中 $c_{-2} = c_{-1} = 0$.

当 $\nu=\mu$ 时, 由于

$$(k+\nu+\mu)(k+\nu-\mu)=(k+2\mu)k>0, \quad k\geq 1,$$

所以从方程 (9) 解得

$$c_{2k+1}=0,\ \ c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(\mu+k)(\mu+k-1)\dots(\mu+2)(\mu+1)k!}c_0,$$

其中 $k=0,1,\dots$. 令

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, \qquad \text{称为 } \textbf{Gamma 函数}.$$

则 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ 注:
$\Gamma(\mu+k+1)=(\mu+k)\dots(\mu+2)(\mu+1)\Gamma(\mu+1)$,
$\Gamma(-n)=\infty$, $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

为了记号方便起见, 取

$$c_0 = \frac{1}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}.$$

则

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\mu}\Gamma(\mu+k+1)\,k!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

因此 Bessel 方程有幂级数解

$$y(x) = J_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\mu+k+1)\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\mu}.$$

容易验证该幂级数在 $|x| < \infty$ 上收敛 (如 D'Alembert 判别法). 函数 $J_\mu(x)$ 称为**第一类 Bessel 函数**.

当 $\nu = -\mu$ 时, 由于 $2\mu \notin \mathbb{Z}$, 方程 (9) 有唯一的解. 取

$$c_0 = \frac{1}{2^{-\mu}\Gamma(-\mu+1)}.$$

类似于 $\nu = \mu$ 的求法得到 Bessel 方程的广义幂级数解

$$y(x) = J_{-\mu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-\mu+k+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\mu}.$$

它在 $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上收敛. 函数 $J_{-\mu}(x)$ 称为**第二类 Bessel 函数**. 由于 $J_\mu(x)$ 和 $J_{-\mu}(x)$ 的最低阶项的幂次不同, 因而它们是线性无关的. 所以 Bessel 方程的通解为

$$y(x) = c_1 J_\mu(x) + c_2 J_{-\mu}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

引伸拓展:

1. 例 2 中只讨论了 $2\mu \notin \mathbb{Z}$ 的情况. $2\mu \in \mathbb{Z}$ 的情形留作练习请读者自己完成.
2. 上述两个变系数微分方程形式上非常简单, 但它们的求解或解的表达式比较复杂. 这可以看出即使是一般的变系数二阶线性微分方程也无法求解的.
3. 上述两个例子中方程的解一般都不是初等函数, 称为**特殊函数**. 特殊函数具有非常丰富的内容, 它在工程上有广泛的应用. 有兴趣的读者可以参见
   - 王竹溪、郭登仁，特殊函数概论，北京大学出版社，2000.

3. Airy 方程

$$y'' + xy = 0$$

是英国天文学家 George B. Airy 研究光学时得到的.

(a) 求 Airy 方程的幂级数解;

(b) 证明 Airy 方程在变换 $u(t) = x^{-\frac{1}{2}} y(x)$, $t = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ 下可以转化成 $\frac{1}{3}$ 阶的 Bessel 方程;

(c) 试用 $\frac{1}{3}$ 阶的 Bessel 函数表示 Airy 方程的通解.

证: (a) 由于 $x = 0$ 是常点, 根据定理 56

Airy 方程在 $\mathbb{R}$ 上有收敛的幂级数解.

类似于 Legendre 方程和 Bessel 方程的解法容易求出 Airy 方程的幂级数解. 作为练习自己完成.

(b) 在给定变换下得到

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x^{-2}y + x^{-1}y' \\ \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = x^{-\frac{7}{2}}y - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}y' + x^{-\frac{3}{2}}y''\end{aligned}$$

因此有

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \frac{1}{9})u = \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}(y'' + xy).$$

(c) 由 Bessel 方程的通解得到 Airy 方程的通解

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}}u(t) = x^{\frac{1}{2}}\left(c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\right)$$

本讲的重点：

- 熟悉和掌握常点和正则奇点的判定和幂级数解的形式
- 幂级数解的求法

本讲的难点：

- 在常点和正则奇点邻域幂级数解的存在性的证明
- 幂级数求解中用递推公式求通项.

作业： 习题三 10, 12.2, 12.5.