第十讲、解的存在性：Peano 定理

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 如何减弱Picard定理的条件，使得保证解的存在性
- 连续性条件下，存在性定理的证明

回顾：

- Picard定理中常微分方程初值问题解的存在和唯一性的条件.
- 两个条件所起的作用

回顾与思考

设问与思考：

- 只有连续性假设能否保证解的存在性？
- 方法上如何突破？

本节将证明连续性即可保证微分方程初值问题解的存在性.

方法突破： Ascoli–Arzelà 引理

函数列 $\{f_n(x)\}, x \in I \subset \mathbb{R}$ 称为在 I 上

- 一致有界, 如果 $\exists K > 0$ 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}, x \in I$ 都有 $|f_n(x)| \leq K$;
- 等度连续, 如果 对 $\forall \varepsilon > 0$ 都 $\exists \delta > 0$ 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2 \in I$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ 就有 $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \varepsilon$.

比较分析：

- 一致有界与有界的区别与联系？
- 等度连续与一致连续的关系？

下面的结果给出函数列存在一致收敛的子列的充分条件.

Ascoli–Arzelá 引理.

如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭集 I 上

- 一致有界、
- 等度连续,

则 $\{f_n(x)\}$ 有子列在 I 上一致收敛.

Ascoli–Arzelá 引理的证明几乎在每一本泛函分析的教科书都有 (参见张恭庆等的泛函分析讲义), 但证明都是在抽象空间中给出的.

教材的附录中有一个初等的证明.

探究、思考与讨论:

- Ascoli–Arzelá 引理中的有界闭集 I 换成有限开区间, 结论成立?
- Ascoli–Arzelá 引理中的有界闭集 I 换成无穷区间, 结论成立?

结论:

1) Ascoli–Arzelá 引理中的有界闭集 I 换成有限开区间, 结论仍然成立.
2) Ascoli–Arzelá 引理中的有界闭集 I 换成无穷区间, 结论未必成立.

定理 19 (Peano 定理)

假设

- $f(x,y)$ 在开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上连续,
- $(x_0,y_0) \in \Omega$.

则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

至少有一个定义在最大存在区间上的连续可微解.

分析:

- 从 Picard 定理的证明, 只需证初值问题 (1) 在 x_0 的某邻域内存在连续可微解即可.
- 证明的关键是构造合适的连续函数空间中, 及其上满足要求的一致有界、等度连续函数列

1. 函数空间的构造

取

$$R := \{(x,y);\, |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\} \subset \Omega,$$

其中 $a,b>0$. 令

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|, \qquad \delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \qquad I = [x_0, x_0+\delta].$$

下证初值问题 (1) 的解在 I 上存在, 即在函数空间 $C(I)$ 上.

注: 在 $[x_0-\delta, x_0]$ 上解的存在性类似可证, 从略.

2. 在 I 上构造 Euler 折线序列.

思想: 以直代曲，然后取极限

对每个 n, 将 I 分成 n 等份, 记分点为

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad 其中 \quad x_i < x_j,\ 0 \le i < j \le n.$$

在 I 上构造 Euler 折线如下: 过 (x_0, y_0) 作直线段

$$\psi_1(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad x \in [x_0, x_1].$$

令 $y_1 = \psi_1(x_1)$. 过 (x_1, y_1) 作直线段

$$\psi_2(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), \quad x \in [x_1, x_2].$$

依此方法, 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造直线段

$$\psi_{i+1}(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad y_i = \psi_i(x_i).$$

记 γ_n 为这些直线段的并, 称之为 **I 上的 Euler 折线**.

3. Euler 折线的表达式.

分析: 上述分段构造的函数无法进行数学运算，须对Euler折线进行数学表示。

记 $\phi_n(x), x \in I$ 为 Euler 折线的表达式, 则

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_n(t))dt + \sigma_n(x), \qquad x \in I, \tag{2}$$

其中在 I 上 $\sigma_n(x) \rightrightarrows 0\ (n \to \infty)$.

事实上, 对 $\forall x \in I$, $\exists s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 使得 $x \in (x_s, x_{s+1}]$, 从而

$$\phi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_s, y_s)(x - x_s).$$

因为

$$
\begin{aligned}
f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t,\phi_n(t))dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k,y_k)-f(t,\phi_n(t)))dt, \\
f(x_s,y_s)(x-x_s) &= \int_{x_s}^{x} f(t,\phi_n(t))dt + \int_{x_s}^{x} (f(x_s,y_s)-f(t,\phi_n(t)))dt,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{s-1} r_n(k) + r_n^*(x),
$$

其中

$$
\begin{aligned}
r_n(k) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k,y_k)-f(t,\phi_n(t)))dt, \\
r_n^*(x) &= \int_{x_s}^{x} (f(x_s,y_s)-f(t,\phi_n(t)))dt, \quad x \in (x_s, x_{s+1}].
\end{aligned}
$$

下证 $\sigma_n(x) \rightrightarrows 0, x \in I$.

因 f 在 R 上一致连续 (f 是有界闭集 R 上的连续函数), 且当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时有

$$|x - x_k| \leq \frac{\delta}{n}, \quad |\phi_n(x) - y_k| = |f(x_k, y_k)(x - x_k)| \leq M(x - x_k) \leq \frac{M\delta}{n},$$

所以对 $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \forall \varepsilon > 0$ 都 $\exists N > 0$ 使得当 $n > N$ 时有

$$|f(x_k, y_k) - f(x, \phi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}].$$

故

$$|r_n(k)| < \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon}{\delta}\, dx = \frac{\varepsilon}{n}, \quad |r_n^*(x)| < \int_{x_k}^{x} \frac{\varepsilon}{\delta}\, dx = \frac{\varepsilon}{n}, \; x \in (x_s, x_{s+1}].$$

从而有 $|\sigma_n(x)| < \varepsilon, x \in I$, 即 $\sigma_n(x) \rightrightarrows 0$.

4. 函数序列 $\{\phi_n(x)\}$ 在 I 上一致有界且等度连续.

根据 Euler 折线的构造有 $\gamma_n \in R$, 所以

$$|\phi_n(x) - y_0| \le b, \quad \text{即} \quad |\phi_n(x)| \le |y_0| + b.$$

从而

$\{\phi_n(x)\}$ 在 I 上一致有界.

下证等度连续. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

对 $\forall s, t \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 因连接点 $(s, \phi_n(s))$ 和 $(t, \phi_n(t))$ 的直线的斜率介于 $-M$ 和 M 之间,

所以只要 $|s-t| < \delta$ 就有

$$|\phi_n(s) - \phi_n(t)| \le M|s-t| < \varepsilon,$$

即 $\{\phi_n(x)\}$ 在 I 上等度连续.

4. 存在性证明.

由 Ascoli–Arzelà 引理,

函数列 $\{\phi_n(x)\}$ 在 I 上存在一致收敛的子列,

记为 $\{\phi_{n_k}(x)\}$. 令 $\phi(x)$ 是子列的一致极限.

由 (2) 知, $\phi_{n_k}(x)$ 满足

$$\phi_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n_k}(t))dt + \sigma_{n_k}(x), \qquad x \in I.$$

对上式令 $k \to \infty$ 得

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt, \qquad x \in I.$$

这就证明了 $y = \phi(x)$ 是初值问题 (1) 在 I 上的解.

Peano 定理证毕.

另一证明: Tonelli 序列

- 对于定理 19 的证明中给定的 δ 和 I, 以及 I 的 n 个等分点 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. 构造函数序列 $\{\phi_n(x)\}$ 如下:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} y_{n0}(x) := y_0, & \text{当 } x \in [x_0, x_1], \\ y_{n1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f(s, y_{n0}(s))ds, & \text{当 } x \in (x_1, x_2], \\ y_{n2}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(s, y_{n0}(s))ds & \\ \qquad\qquad + \int_{x_1}^{x-\frac{\delta}{n}} f(s, y_{n1}(s))ds, & \text{当 } x \in (x_2, x_3], \\ \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ y_{n,n-1}(x) := y_0 + \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y_{ni}(s))ds & \\ \qquad\qquad + \int_{x_{n-2}}^{x-\frac{\delta}{n}} f(s, y_{n,n-2}(s))ds, & \text{当 } x \in (x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

该序列称为 **Tonelli 序列**.

练习：

给出使微分方程

$$y' = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在唯一的所有初始点 (x_0, y_0), 并说明理由.

利用该序列和 Ascoli–Arzelá 引理可以证明定理 19 (Peano 定理).

Peano 定理也有很多进一步的推广, 超出本教材的范围.

本讲重点和难点：Peano定理的理解与证明

作业： 习题二 10，12，13.