第八讲、存在唯一性定理的证明：距离空间和压缩映射原理

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

从本讲开始，连续四讲讲述第二章的内容：

- 微分方程初值问题解的存在性、唯一性、连续依赖性

作为研究微分方程初值问题解的存在性、唯一性的准备, 也为同学们了解现代分析一些基础知识

本讲主要介绍

- 距离空间的定义和基本性质
- 完备距离空间的压缩映射原理

回顾与思考

回顾： 解的存在、唯一性定理。

思考： 有可能从哪方面入手证明！

- 常微分方程初值问题解的存在唯一性的证明有多种方法.
- 大多数教科书采用的是 Picard 的逐次逼近法.
- 本书将运用较为近代的证明方法, 利用完备距离空间中的压缩映射原理证明微分方程解的存在性等结论.
- 压缩映射原理体现了现代分析的思想, 有利于学生后续抽象分析课程的学习.

温故：

- $\mathbb{R}^n$ 中的距离有哪些定义？
- $\mathbb{R}^n$ 中的距离在微积分中起到哪些作用？

$\mathbb{R}^n$ 中常见的距离定义

- 实数集 $\mathbb{R}$ 中任意 x, y 的距离通常定义为

$$\rho(x,y) = |x-y|,$$

其中$|\cdot|$表示$\mathbb{R}$中点的绝对值.

- 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$,

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

定义了 x 与 y 之间的距离.

微积分中的

- 极限和函数的连续性,
- 曲线的长度等等,

都离不开距离.

注意： 二元函数 $\rho(\cdot,\cdot)$ 满足下列性质：对 $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$ 有

- $\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
- $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;
- $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

问题：

- 一般的抽象空间中如何定义距离？
- 为什么要在一般的抽象空间中定义距离？

距离空间的定义

设X是任意非空集合. 对$\forall x,y\in X$, 有一实数 $\rho(x,y)$ 与之对应, 且满足:

1) 非负性: $\rho(x,y)\geq 0$，$\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$;

2) 对称性: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) 三角不等式: 对$\forall x,y,z\in X$有$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$,

称

- $\rho(x,y)$为x与y之间的**距离**.
- 称(X,ρ)为以ρ为距离的**距离空间**.

以后为方便起见，在距离已知的条件下，简称X是距离空间.

如果$Y\subset X$，则(Y,ρ)也是一个距离空间, 称之为X的**子空间**.

注: 距离关于它的变量是连续的.

给定非空集合 X.

问:是否总存在 X 上的距离使之成为距离空间?

距离空间的例子

$C[a,b]$ 空间

- 令 $C[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上的连续函数全体构成的集合.
- 对任意的 $x(t), y(t) \in C[a,b]$, 定义

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|. \tag{1}$$

则 $\rho(x,y)$ 是 $C[a,b]$ 上的距离. 从而 $C[a,b]$ 是以 $\rho(x,y)$ 为距离的距离空间.

证: 容易验证 ρ 满足距离定义中的非负性和对称性.

下证 ρ 满足三角不等式. 对 $\forall x(t), y(t), z(t) \in C[a,b]$ 有

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &\leq |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)| = \rho(x,z)+\rho(z,y). \end{aligned}$$

故有

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

所以 ρ 是 $C[a,b]$ 上的距离. 从而 $(C[a,b],\rho)$ 是一个距离空间.

注： $C[a,b]$ 空间乃是本章的核心。这是大家常见的空间，是抽象空间中至关重要的距离空间的例子。

问题：

- $C[a,b]$ 上的距离从几何上看本质是什么？
- $C[a,b]$ 上是否可以定义其它的距离？

回忆： 连续函数列的一致收敛性

距离空间的收敛性

类似于欧式空间微积分理论中极限的定义, 可以在一般的距离空间中定义极限的概念.

设 (X,ρ) 是任一非空距离空间.

- 点列 $\{x_n\}\subset X$ **收敛**, 如果存在 $z\in X$, 使得对 $\forall\varepsilon>0$， 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geq N$ 时有
$$\rho(x_n,z)<\varepsilon.$$
此时称点列 $\{x_n\}$ **收敛到** z, 或 z **是** $\{x_n\}$ **的一个极限**. 记为
$$\lim_{n\to\infty}x_n=z,\qquad \text{或}\qquad x_n\longrightarrow z(n\to\infty).$$
- 点列 $\{x_n\}\subset X$ 是 **Cauchy 列**, 如果对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n,m\geq N$ 时有
$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

思考：

- 与微积分中收敛性定义的比较？
- 微积分中收敛有哪些性质？

距离空间中极限的性质

命题 10

设 (X,ρ) 是任一非空距离空间, $\{x_n\} \subset X$ 是一点列。

(a) 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;

(b) 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则其任意子序列必收敛;

(c) 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则其必为 Cauchy 列.

证: (a). 设 z,y 是 $\{x_n\}$ 的极限. 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时有

$$\rho(x_n, z) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故对任意的 $n_0 > N$ 有

$$\rho(z,y) \leq \rho(z, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, y) < \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得 $\rho(z,y) = 0$, 即 $z = y$.

(b) 和 (c). 由极限的定义和 (a) 的证明容易得到. 留作习题. 证毕.

引导与探索:

- 欧式空间中收敛点列当且仅当是 Cauchy 列!
- 一般空间，比如$C[a,b]$ 上是否可以有距离使得距离空间中的Cauchy列不收敛?

注: 在一般距离空间中, 有例子表明一个 Cauchy 列未必收敛.

定义:

- 一个距离空间称为是**完备的**, 如果它的任意 Cauchy 列都收敛.

命题 11

设 ρ 是 (1) 中定义的 $C[a,b]$ 上的距离, 则距离空间 $(C[a,b],\rho)$ 是完备的.

证: 设 $\{x_n\} \subset C[a,b]$ 是任一 Cauchy 列.

则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得当 $m,n \geq N$ 时

$$\rho(x_n,x_m) = \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

特别地有

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

因此, 对任意给定的 $t \in [a,b]$,

$$\{x_n(t)\} \subset \mathbb{R} \text{ 是 Cauchy 数列},$$

从而收敛. 记其极限为 $x(t)$. 这样得到定义在 $[a,b]$ 上的函数 $x(t)$.

从 (2) 得, 当 $n \geq N$ 时有

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in [a,b]. \tag{3}$$

$*1$ 首先证 $x(t) \in C[a,b]$.

对 $\forall t_0 \in [a,b]$, 因 $x_N(t) \in C[a,b]$, 所以 $\exists \delta > 0$, 使得
当 $t \in [a,b]$ 且 $|t-t_0| < \delta$ 时有

$$|x_N(t) - x_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

故有

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &\leq |x(t) - x_N(t)| + |x_N(t) - x_N(t_0)| + |x_N(t_0) - x(t_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 连续. 从而, $x(t) \in C[a,b]$.

$*2$ 其次证 $x_n(t)$ 在 $C[a,b]$ 上收敛到 $x(t)$.

由 (3) 得, 当 $n \geq N$ 时有

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

即当 $n \geq N$ 时有

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

至此证明了

$C[a,b]$ 上任何 Cauchy 列都收敛

从而 $(C[a,b],\rho)$ 是完备的距离空间.

不完备度量空间的例子

在 $C[a,b]$ 上定义

$$\rho^*(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt, \qquad \forall x(t),y(t) \in C[a,b],$$

则

- ρ^* 也是 $C[a,b]$ 上的距离.
- 但 $C[a,b]$ 在距离 ρ^* 下不是完备的.

$(C[a,b],\rho)$ 完备距离空间的推广

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭区域. 在 $C(\Omega)$ 上定义

$$\rho(y_1,y_2)=\max_{x\in\Omega}|y_1(x)-y_2(x)|,\qquad \forall y_1,y_1,\in C(\Omega).$$

则 $(C(\Omega),\rho)$ 是完备的距离空间.

本讲重点: $(C[a,b],\rho)$ 是完备距离空间

本讲难点: $(C[a,b],\rho)$ 的完备性证明

课后要求: 进一步理解 $(C[a,b],\rho)$ 是完备距离空间及其证明

作业： 习题二 1， 2.