第四章 微分中值定理与导数的应用

1. 罗尔定理中是否可把“$f(x)$在区间$[a,b]$上连续、开区间(a,b)上可导”两条件换成“在闭区间$[a,b]$上可导”一个条件？

答　这样一换，条件加强了，结论当然成立，但条件增强了，其适用范围就要缩小。例如，函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，易见$f(x)$在$[-1,1]$满足罗尔定理三个条件，但若将罗尔定理三个条件换成“$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f(a)=f(b)$”，这个$f(x)$就不满足了。一般在研究数学命题时，总是力求把命题的条件减弱，以扩大其适用范围。

2. 在证柯西定理时（条件与教材定理 4.1.4 相同），能否这样证：因$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上均满足拉格朗日中值定理，故存在$\xi\in(a,b)$使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$$

两等式两边相除即可得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

答 这个证法是错误的。因为对于两个不同的函数$f(x)$和$g(x)$，拉格朗日中值定理中的ξ一般来说不一定相同，即不一定能找到一个公共的ξ，使上面两等式同时成立。因此这样证不对。

3. 任何$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，都可用洛必达法则来求吗？

答　不一定。教材中定理 4.2.1 中关于洛必达法则的三个条件，必须全部满足才行。不然洛必达法则的结论可能不成立。

例如$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$为“$\dfrac{0}{0}$”型，但$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在，因而不能用洛必达法则。实际上，这题极限可按“无穷小乘有界变量为无穷小”求得：

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

又例$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，但$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$不存在。实际上，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$。

4. 数列的极限可用洛必达法则来求吗？

答 因数列不存在导数，故不能直接用洛必达法则，但由归结原理，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=A$，即可先化为求函数的极限。在利用洛必达法则求得极限后就间接地得到了原数列的极限。

但要注意的是，当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在时，并不能断定 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ 也不存在。

5. 泰勒公式的拉格朗日余项为 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，问是否成立 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$？

答 不一定。例如 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内有任意阶函数，且

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x)$$

令 $x=-1$ 代入上式可得 $R_n(-1)=\dfrac{1}{2}-\left[-1+1-\cdots+(-1)^n\right]=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}+1$ 可见 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(-1)\neq 0$。

6. 为什么说 $f(x)$ 的导数只在有限多个点处为零，其余各处都大于零（或小于零），就可得 $f(x)$ 是严格单调增加（减少）的？

答 任取 $x'<x''$，设在 (x',x'') 内 $f'(x)$ 的零点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，而在其它点处 $f'(x)$ 均大于零，则由单调性判别法知 $f(x)$ 在 $[x',x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_n,x'']$ 上均严格单调增，故 $f(x')<f(x_1)<f(x_2)<\cdots<f(x_n)<f(x'')$。因此 $f(x)$ 为严格单调增函数。

7. 若在 $x=x_0$ 处 $f'(x_0)>0$，能否判定 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内单调增？

答 $f'(x_0)>0$ 只能保证存在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$， $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f(x)>f(x_0)$， $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时， $f(x)<f(x_0)$，而不能保证在某邻域内单调增。

例 $f(x)=\begin{cases} x & x\text{为有理数} \\ x+x^2 & x\text{为无理数} \end{cases}$

则易见 $f'(0)=1>0$，但 $f(x)$ 在任何区间内无单调性。

8. 同一函数的极大值是否一定大于极小值？

答 因极值是函数的局部性质，故极大值不一定大于极小值。例如 $f(x)=x+2\sin x$，易见 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ 为极大值， $f\left(\frac{10}{3}\pi\right)=\frac{10}{3}\pi-\sqrt{3}$ 为极小值，但 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}<\frac{10}{3}\pi-\sqrt{3}=f\left(\frac{10}{3}\pi\right)$。

9. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的最大（小）值点一定是极大（小）值点吗？

答 不一定。当最值点出现在端点时就不一定是极值点。例 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上最大值点为 $x=1$，但它不是极大值点。但当最值点出现在区间 $[a, b]$ 内部时，最大值（最小值）点一定是极大值（极小值）点。

10. 若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则它与 $f''(x_0)=0$ 有什么关系？

答 若 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，则在 $f(x)$ 二阶导数存在时，一定有 $f''(x_0)=0$。但也可能 $f''(x_0)$ 不存在。例曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处 $f''(0)$ 不存在，但 $(0,0)$ 是拐点。另外 $f''(x_0)=0$ 也不能保证 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，例如 $f(x)=x^4$，易知 $f''(0)=0$，但 $(0,0)$ 不是拐点。

一般来说若 $f(x)$ 具有 $n(n\geq 2)$ 阶导数，且在 $x=x_0$ 处，$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)$， $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 为拐点，这是因为此时可推得在 x_0 两边，$f^{(n-1)}(x)$ 异号，$f^{(n-2)}(x)$ 同号，$f^{(n-3)}(x)$ 异号，…，$f''(x)$ 异号，故 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

类似也可得到若 $f(x)$ 具有 n 阶导数，在 $x=x_0$ 处 $f'(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)\neq 0$，则 n 为偶数时，$x=x_0$ 为极值点。