第十二章 微分方程

1. 是否所有的微分方程都有通解？

答：不是的。有的方程例如 $y'^2+1=0$ 就无解；有的方程例如 $y'^2+y^2=0$ 只有 $y=0$ 一个解。

2. 微分方程的通解是否包含了微分方程的一切解？

答：通解不一定包含所有解，例如方程 $y'^2-4y=0$，它有通解 $y=\left(x+c\right)^2$，但它不包含方程的解 $y=0$，$y=0$ 称为方程 $y'^2-4y=0$ 的奇解，一般来说奇解的曲线与方程的所有积分曲线相切。

3. 一阶线性方程的通解是否包含了该方程的一切解？

答：对于齐次一阶线性方程 $y'+p\left(x\right)y=0$，它的通解是 $y=ce^{-\int p(x)dx}$，特别 $y_0=e^{-\int p(x)dx}$ 是解，假定 y_1 是方程另一解，则

$$\left(\frac{y_1}{y_0}\right)'=\left(\frac{y_1}{e^{-\int p(x)dx}}\right)'=\frac{y_1'e^{-\int p(x)dx}-y_1\left(e^{-\int p(x)dx}\right)'}{\left(e^{-\int p(x)dx}\right)^2}$$

$$=\frac{y_1'e^{-\int p(x)dx}+y_1p\left(x\right)e^{-\int p(x)dx}}{\left(e^{-\int p(x)dx}\right)^2}=\frac{y_1'+y_1p\left(x\right)}{e^{-\int p(x)dx}}=\frac{0}{e^{-\int p(x)dx}}=0,$$

即 $\dfrac{y_1}{y_0}$ 为常数，亦即 $y_1=c_0y_0=c_0e^{-\int p(x)dx}$，

故对一阶齐次线性微分方程来说，通解包含了全部解。

再来看非齐次一阶线性方程 $y'+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$，它的通解是 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)$，特别 $y_2=e^{-\int P(x)dx}\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx$ 是解。

假定 y_3 是方程另一解，则 y_3-y_2 是 $y'+P\left(x\right)y=0$ 的解，

由前所述 $y_3-y_2=ce^{-\int P(x)dx}$，

即 $y_3=y_2+ce^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q\left(x\right)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right)$，

故方程 $y'+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$ 的任何解都包含在通解之中。

可以证明，二阶线性微分方程 $y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$ 的通解也包含了该方程的一切解。

4. 如何解释对可分离变量的微分方程 $f(x)dx = g(y)dy$，两端同时积分得 $\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$，左边对 x 积分，右边对 y 积分呢？

答：若 $f(x)dx = g(y)dy$ 有解 $y = \varphi(x)$，把它代入方程可得 $f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

两边对 x 积分得 $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx + c$，

根据积分换元法即有 $\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$。

5. 在解微分方程过程中，常需要将微分方程变形，这样会不会使微分方程产生"失解"和"增解"现象？

答：在将微分方程变形过程中是可能会丢失某些解和增加某些解，一般来说，若在等式两边同时除以 $\varphi(x,y)$，则可能丢失 $\varphi(x,y)=0$ 的解，若等式两边同时乘以 $\varphi(x,y)$，则可能增加 $\varphi(x,y)=0$ 的解。

例方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$，方程两端除以 y 得 $\frac{dy}{y} = 2xdx$，积分后可得通解 $\ln|y| = x^2 + c$，

这里原方程的解 $y=0$ 丢失了；若通解改成 $y = ce^{x^2}$，这时又找回了 $y=0$ 这解。

由于通解不一定要求包含所有解，因此 $\ln|y| = x^2 + c$ 和 $y = ce^{x^2}$ 都可看做原方程的通解。

6. 在解微分方程时可用定积分方法吗？

答：在解有初始条件的微分方程时，往往可以根据微分方程的特点，用定积分的方法来解。

比如对有初始条件的可分离变量的微分方程 $\begin{cases} g(y)dy = f(x)dx \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 就可用定积分方法来解，$\int_{y_0}^{y} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$，

再如有初始条件的一阶线性微分方程 $\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$，也可用定积分的方法，

其特解为 $y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx}\left(\int_0^x Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx}dx + y_0\right)$。

7. 在解欧拉方程 $x^n \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}x\frac{dy}{dx} + P_n y = 0$ 时，用变换 $x = e^t$ 将它化为常系数线性齐次方程来求解，但 e^t 总是正的，这是否意味着欧拉方程仅能对正 x 值

求解？

答：由于我们用了变换 $x=e^t$，因此求解过程始终是在 $x>0$ 的条件下进行的，不过在 $x<0$ 时，我们又将 x 换成 $-x$ 再来求解。

例如方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+P_1x\frac{dy}{dx}+P_2y=0$ （1）

令 $x=-u$，当 $x<0$ 时 $u>0$， $y(x)=y(-u)=z(u)$，

$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{dz}{du}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{dz}{du}\right)=-\frac{d^2z}{du^2}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d^2z}{du^2}$，

代入原方程得 $u^2\frac{d^2z}{du^2}+P_1u\frac{dz}{du}+P_2z=0$ （2）

这样得到的新变量 u,z 的方程和原变量 x,y 的方程都是欧拉方程，且各项系数都相同，故若 $z=z(u)$ 是（2）的解，则 $y=y(-x)$ 就是（1）的解，即当 $x<0$ 时，欧拉方程的解可以从 $x>0$ 时的解 $y=y(x)$ 中将 x 换成 $-x$ 得到。