第十章 曲线积分和曲面积分

1. 第一型曲线积分和第二型曲线积分有什么关系？

答：第二型曲线积分是借助于第一型曲线积分定义的，但是它与第一型曲线积分的一个主要区别是：它和曲线的方向有关，这是因为切向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$和曲线的方向有关，因此$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{L^-} Pdx+Qdy+Rdz$，其中$L^-$表示与$L$方向相反的曲线。

这种区别在计算公式上的表现是：在光滑曲线L：$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t),\alpha\le t\le\beta$上的第一型曲线积分为：$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\omega'(t)^2}dt$。右边的定积分的上限总大于下限，而对于第二型曲线积分，如果取L的方向与参数t增加的方向一致，则有：

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q\ (\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\ \psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)\}dt$$

而$\int_{L^-} Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\int_\beta^\alpha\{P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q\ (\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)\}dt$$

即右端定积分的上下限与曲线的方向有关，下限对应于曲线的起点，上限对应于曲线的终点。

2.试判断下列结果是否正确，为什么？

设$I=\oint_L xdy$，L是圆周：$x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向，由于积分曲线是关于y轴对称，被函数x是关于x的奇函数，所以$I=\oint_L xdy=0$。

答：这是不对的，因为第二型曲线积分不能这样用“对称性”，事实上，$I=\int_0^{2\pi}a\cos\theta d(a\sin\theta)=\int_0^{2\pi}a^2\cos^2\theta d\theta=\pi a^2$这是因为第二型曲线积分（以及第二型曲面积分）涉及积分域的定向问题，奇偶对称性比较复杂. 设L关于y轴对称,（L_1为L在y轴右侧的部分）有$\int\limits_L Q(x,y)dy=\begin{cases}2\int\limits_{L_1}Q(x,y)dy & \text{当Q(x,y)关于x为奇函数}\\ 0 & \text{当Q(x,y)关于x为偶函数}\end{cases}$

如图 10-14 设$L=L_1+L_2$，$L_1:y=\varphi(x),\ \ x{:}0\to a$，$L_2:y=\varphi(-x),x:-a\to 0$

则$\int_L Q(x,y)dy=\int_{L_1}Q(x,y)dy+\int_{L_2}Q(x,y)dy$

$$=\int_0^a+Q(x,\varphi(x))\varphi'(+x)dx+\int_{-a}^0-Q(x,\varphi(-x))\varphi'(-x)dx$$

对 $\int_{-a}^{0} - Q(x,\varphi(-x))\varphi'(-x)dx \underline{\underline{x=-t}} \int_{a}^{0} Q(-t,\varphi(t))\varphi'(t)dt$

则 $\int_L Q(x,y)dy = \int_0^a [Q(x,\varphi(x)) - Q(-x,\varphi(x))]\varphi'(x)dx$

$$= \begin{cases} 2\int_0^a Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)dx = 2\int_{L_1} Q(x,y)dy & Q(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数} \\ 0 & Q(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数} \end{cases}$$

3.在与路径无关的等价命题中，为什么要限制 D 为单连通区域？

答：若 D 不是单连通域，则与路径无关的等价命题可能不成立. 如,例：计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 L 为一条分段光滑且不经过原点的连通闭曲线，L 的方向为逆时针方向。详见例 17 的解答，由解答可以看到有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，当 L 包含在一个使 $P(x,y),Q(x,y)$ 都具连续一阶偏导数的单连通区域内时，分段光滑的封闭有向曲线 L 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$。当 L 不能落在这样的一个单连通区域内时，就没有这样的性质。

4.第二型曲面积分与第一型曲面积分的关系

答：第二型曲面积分和第一型曲面积分是具有不同物理背景的两种类型的曲面积分。第二型曲面积分虽然借助于第一型曲面积分来定义的，但是由于它与法向量 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 相联系，曲面的法线指向规定了曲面的一侧，因此有方向性。对于同一曲面的不同两侧，相应的第二型曲面积分相差一个符号。例如：对于正则曲面 $\Sigma: z = z(x,y)$， Σ 在 xoy 平面上的投影为 D_{xy}，则

$$\iint_L P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} [(P(x,y,z(x,y))(-z_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z_y) + R(x,y,z(x,y))]dxdy$$

当 Σ 的正侧为上侧时，二重积分前取“＋”号，当 Σ 的正侧为下侧时，二重积分前取“－”号。

对于形如 $x = x(y,z), y = y(x,z)$ 的正则曲面 Σ，相应地便有前侧，后侧和左侧，右侧之分。

对于一般分块光滑的封闭曲线，则有外侧，内侧之分，正确而熟练地选取积分前的符号是第二型曲面积分计算中的一个要点。

5.设 Σ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (y \ge 0)$ 的外侧表面，下面计算 $\iint_\Sigma zds, \iint_\Sigma zdxdy$ 的理由及结果是否正确，为什么？

由于被积函数 $R(x,y,z) = z$ 是关于 z 的奇函数，且积分域是对称的，所以 $\iint_\Sigma zdS = 0$，

同理也有 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = 0$。

答：第一型曲面积分和第二型曲面积分的奇偶对称性是不一样的。问题中 $\iint\limits_{\Sigma} zdS = 0$ 是正确的，事实上，Σ 关于 xoy 平面对称，而被积函数 z 在关于 xoy 平面的两个对称点上的值差一个符号，所以 $\iint\limits_{\Sigma} zdS = 0$。但 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = 0$ 不对，因为有向曲面 Σ 关于 xoy 平面对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy & \text{当}R(x,y,z)\text{是关于}z\text{的奇函数} \\ 0 & \text{当}R(x,y,z)\text{是关于}z\text{的偶函数} \end{cases}$$

Σ_1 是 Σ 中 $z \geq 0$ 的部分，这里 Σ 对称包括曲面方向的对称，可以通过计算公式直接证得：

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = 2\iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy = 2\iint\limits_{Dxy} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, rdr = \frac{2}{3}\pi a^3$$

因为第二型曲面积分的奇偶对称性比较复杂，因此在计算时一般是化成二重积分后再利用对称性。

6. 在重积分计算中，可以用代入技巧吗？下面解答正确吗？

Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧，Ω 是 Σ 所围的球体，由 Gauss 公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dV \underline{\underline{\text{代入}}} 3\iiint\limits_{\Omega} R^2 dV = 3R^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^5$$

答：上面的解答错误，在重积分计算中，不能用代入技巧，代入技巧是曲线、曲面积分中特有的，因为沿曲线、曲面积分时，被积函数中的变量 (x,y,z) 需满足曲线、曲面方程。而在重积分中给出的是其边界方程，如上面的解答中，Σ 的方程是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$，而不是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，所以计算：$\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dV$ 时不能代入，正确的解法是：

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = 3\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dV = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho$$

$$= 6\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{2}{15}\pi R^5.$$

7. 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式这三个公式有哪些共性和联系？

答：格林公式、高斯公式和斯托克斯公式以及一元微积分中的牛顿——莱布尼兹公式，它们所揭示的是同一类型的关系在不同维数空间中的反映。它们的共性表现为（1）这三个公式都给出了几何体上的积分与几何体边界上积分之间的关系。(2) 这三个公式等号两端的闭区域（或闭曲线）都具有方向性，按右手系或外法向定向，当等号一端的区域（或曲线）改变方向时，另一端的区域（或曲线）也随之改变方向。它们的联系表现在：后两个公式可看作格林公式的推广，将格林公式的二维区域 D 推广到三维区域Ω，便是高斯公式，它们都是将某区域上的二（或三）重积分与其边界上的曲线（曲面）积分建立了联系，在斯托克斯公式中，如果Σ是xoy平面上的闭区域，就成了格林公式。

事实上，在现代数学分析中，它们已经被统一在一个定理之中了，即广义的斯托克斯公式：设ω是区域$E \subset R^n$中的C^1类$(k-1)$形式，Σ是E中具有适当良好性质的$k-$曲面，则$\int\limits_{\Sigma} d\omega = \int\limits_{\partial\Sigma} \omega$。这里关于“形式”,“适当良好性质”的曲面等概念，我们这里就不介绍了。