第 8 章　多元函数微分学及其应用

1. 如何判别二元函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域 D 中聚点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 是否存在？

答：若 P_0 邻域中的任一点 $P(x,y)$ 沿任何路径趋于定点 (x_0,y_0)，函数 $f\left(x,y\right)$ 都趋于 A，则知 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 存在且等于 A．这里强调的是极限和 P 趋于 P_0 的路径无关，千万不能以沿一条特殊路径趋于 (x_0,y_0) 得到的 $f\left(x,y\right)$ 的极限作为二重极限．反过来，如果 P 沿不同的路径趋于 P_0 时，$f\left(x,y\right)$ 趋于不同的值，则可以肯定函数的二重极限不存在.

如：判断下列极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2}$ 是否存在.

【错解】因为 $x\to 0, y\to 0$，所以 $x-y\to 0$，原式$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2}=1$.

这个解法是错误的，$x-y\to 0$ 实际上是以 $x\to y$ 这一特殊路径来求解极限.

【正确解答】沿 $y=x$ 趋于 $\left(0,0\right)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$；

沿 $y=2x$ 趋于 $\left(0,0\right)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=2x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4}{4x^4+x^2}=0$，

可见 $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2}$ 沿两条不同路径趋于 $\left(0,0\right)$ 时极限不一样，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2}$ 不存在.

2．我们把先后两次求出的极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x,y\right)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f\left(x,y\right)$ 称为二次极限，它们与二重极限是否为一回事？

答：不是一回事，二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 是以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时,二元函数的极限，而累次极限是沿特殊路径——折线 $y=y$ 和 $x=x_0$（或 $x=x$ 和 $y=y_0$）趋于 (x_0,y_0) 时两个一元函数的极限．它们之间没有必然的联系.

（1）　两个累次极限都存在，不能保证二重极限存在.

如：$f\left(x,y\right)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，两个累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,y\right)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f\left(x,y\right)=0$，但是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

（2）　二重极限存在，不能保证累次极限存在.

如：$f\left(x,y\right)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\left(xy\neq 0\right)$，

因为$0\leq\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}\to 0\ (\rho\to 0\text{时})$，所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

但$\lim\limits_{x\to 0}y\sin\frac{1}{x}$不存在，而$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{y}=0$，所以$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在.

同理$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在.

（3） 它们之间的联系仅表现为如下定理：

定理：若$f\left(x,y\right)$在点(x_0,y_0)的二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f\left(x,y\right)$都存在，则它们必相等.

3.在多元函数求极限时，可以用$L'Horpital$法则吗？

答：不能. 但是可以对多元函数换元变成一元函数求极限后，再用$L'Horpital$法则，

如：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^2y\right)-\arcsin\left(x^2y\right)}{x^6y^3}$，令$x^2y=t$，由于$y\to 0,x\to 0,$所以$t\to 0$

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3}\overset{L'}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2}$$

$$\overset{L'}{=}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t-\frac{t}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}}{6t}=\lim_{t\to 0}-\frac{\sin t}{6t}-\lim_{t\to 0}\frac{1}{6\left(1-t^2\right)^{3/2}}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$

4.求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，作变量代换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，当$x\to 0,y\to 0$时，$r\to 0$，$\theta$任意，于是

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}=\lim\limits_{r\to 0}r\sin\theta\cos\theta=0$，这种做法可行吗？

答：这种方法是可以的。因为$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$当$(x,y)\neq(0,0)$时是一个可逆变换。以后碰到分母含有$x^2+y^2$，$(x,y)\to(0,0)$的极限都可以采用这个代换。又如

求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$，可令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则有

$$0\leq\left|xy\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2\left|\sin 4\theta\right|\leq\frac{r^2}{4}\to 0,\ (r\to 0)\ ,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

但对于代换后分母仍含有 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 时，则要小心. 如：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则原式 $=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$，这个极限看似为 0，实际却不是。因为当 $r\to0$ 时，θ 可以以任何方式变动：当 $\theta=0$，而 $r\to0$ 时，上述极限为 0；当 θ 满足 $\cos\theta=r\sin\theta$，而 $r\to0$ 时，上述极限是 $\dfrac{1}{2}$。因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

5.如何判别二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

答：首先，若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点不连续，则在 (x_0,y_0) 点不可微. 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点偏导不存在，则在 (x_0,y_0) 点不可微.

其次，若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点偏导 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 都存在，需判断

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

是否为 0. 若极限为 0，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微. 若极限不存在，则不可微. 若极限存在但不为 0，$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点也不可微.

当然，若能判别偏导函数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则由可微的充分条件也可知 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，但是这个判断比较复杂，且只是充分条件，偏导不连续，不能保证不可微，所以还是用上述的定义法来判别为好。

7.在多元复合函数求导的链法则中，有定理：设 $x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$ 在点 (s,t) 的偏导数 $\dfrac{\partial x}{\partial s},\dfrac{\partial x}{\partial t},\dfrac{\partial y}{\partial s},\dfrac{\partial y}{\partial t}$ 都存在，函数 $z=f(x,y)$ 在对应点 (x,y) 处可微，则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 在点 (s,t) 处的偏导数存在，且有 $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$，$\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$，这里结论中只用到 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x, f_y，是否可以把“$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微”这一条件减弱为“$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导存在”？

答：不能，外函数 $f(x,y)$ 的可微性这一假设是不能省略的，否则求导公式不一定成立，如函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不

可微，若以 $f(x,y)$ 为外函数，$x=t,y=t$ 为内函数，则以 t 为自变量的复合函数 $z=F(t)=f(t,t)=\frac{t}{2}$，所以 $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}$，这时若用链法则，将得出错误结果

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0\cdot 1+0\cdot 1=0,$$

这就说明在使用复合函数求导公式时，必须注意外函数 f 可微这一重要条件.

8.方向导数和偏导存在之间有什么必然的联系吗？

答：方向导数和偏导数之间的关系为：当 $f(x,y)$ 在点 $P(x\ ,y)$ 的偏导数 f_x,f_y 存在时，f 沿 x 轴正向的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|_P=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x+t\cos 0,y+t\sin 0)-f(x,y)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}=f_x(x,y);$$

沿 x 轴负向的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|_P=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x+t\cos\pi,y+t\sin\pi)-f(x,y)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t,y)-f(x,y)}{t}=-f_x(x,y),$$

同样可得 f 沿 y 轴正向，负向的方向导数也存在，分别为 $f_y(x,y),-f_y(x,y)$.

但是，偏导数存在不能保证 $f(x,y)$ 除这四个方向以外的其它方向的方向导数都存在. 反之，一切方向的方向导数都存在，也不能保证偏导数存在.

如：函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点 $(0,0)$ 沿任何方向的方向导数都是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{|t|}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t}=1,$$

但 $z_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，

$z_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$ 不存在，

该函数的图像是顶点在原点的圆锥面，从几何上看单侧的方向导数都存在，但偏导数却不存在.

9.可以把求条件极值问题转化成求无条件极值的问题来做吗？

答：条件极值问题如果能将约束条件所确定的隐函数，用显式表示出来，代入目标函数，就可以转化成无条件极值问题. 但是还要注意，这个过程中定义域是否一致.

如：求双曲柱面 $x^2-z^2-1=0$ 到原点最近的点.

解：要求距离函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $x^2-z^2-1=0$ 下的最小值点. 约束条件 $x^2-z^2-1=0$ 可以确定二元隐函数，如果把 x,y 看作自变量，则 $z^2=x^2-1$ 代入

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 得 $h(x,y)=2x^2+y^2-1$，求驻点 $h_x=4x=0, h_y=2y=0$，驻点为 $(0,0)$，但是双曲柱面上没有 $(0,0)$ 点，错在哪里？

问题发生的原因是我们需求柱面上的最值点，而实际上我们在对定义域为整个 Oxy 平面的函数 $h(x,y)=2x^2+y^2-1$ 求驻点. 这是不对的. 那该怎么办？若把 y 和 z 看成自变量，（而不是 x 和 y）就可以避免这个问题，约束条件 $x^2-z^2-1=0 \Rightarrow x^2=z^2+1$，代入 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 得 $g(y,z)=1+y^2+2z^2$，双曲柱面 $x^2-z^2-1=0$ 上 $(y,z)\in$ 整个 Oyz 平面，$g(y,z)$ 的定义域也是整个 Oyz 平面，所以求双曲柱面上的最值，可以通过求 $g(y,z)$ 的驻点得到，$g_y=2y=0, g_z=4z=0$，所以 $(0,0)$ 是 $g(y,z)$ 的驻点. $x^2=z^2+1 \Rightarrow x=\pm 1$，柱面上对应的点就是 $(1,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$. 又 $g(y,z)=1+y^2+2z^2\geq 1$，可以看出双曲柱面上点 $(\pm 1,0,0)$ 到原点的距离最近.

但是，把条件极值问题转化为无条件极值并不总是可行的，这时就要用到拉格朗日（Lagrarge）乘数法，拉格朗日乘数法是拉格朗日在 1755 年发展了解 $\max-\min$ 几何问题的方法. 今天这个方法在经济学中，在工程中（比如设计多级火箭）以及在数学中都很重要.

10.条件极值问题中，构造 Lagrarge 函数求出驻点后，如何进一步判断驻点是否为极值点，（即有没有极值点的充分条件）？

答：在教材中，我们碰到的条件极值问题都是实际问题. 如教材中有例：在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 上位于第一象限的部分求一点 P，使过 P 点的切平面和三个坐标平面所围成的四面体体积最小. 这个最小值是存在的，而构造的 Lagrarge 函数的驻点是唯一的，所以此驻点就是所求的最小值点，无需充分条件进一步判断，在这里，我们只需要大家掌握用 Lagrarge 乘数法来解决实际问题中的条件极值（最值）问题.

实际上，条件极值问题是有充分条件的，因为涉及二阶微分，这里不再论述。