第七章　空间解析几何

1. 向量能比较大小吗？

答：不能。向量是既有大小，又有方向的量，而方向无所谓大小。当然向量的模是可以比较大小的。

2. 任一向量的方向余弦的平方和为1。那么若三个数的平方和为1是否能成为某向量的方向余弦呢？

答：能的。设 A, B, C 满足 $A^2+B^2+C^2=1$，取点 $M\left(A, B, C\right)$.

令 $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OM}$，则 $\vec{\alpha}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=A$$
$$\cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=B$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=C$$

因此三元数组中的三个数可成为某向量方向余弦的充要条件是这三个数的平方和为1。

3. 数量积和向量积中的消去律是否成立？即若 $\vec{a}\neq 0$，能否由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 或 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ 推得 $\vec{b}=\vec{c}$？

答：不能。因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$. 此时只能推得 $\vec{b}-\vec{c}$ 是垂直于 $\vec{a}$ 的一个向量。

而 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线。此时只能推得 $\vec{b}-\vec{c}$ 是平行于 $\vec{a}$ 的一个向量。

4. “三元方程 $F\left(x, y, z\right)=0$ 表示空间一曲面”这一说法是否正确？

答：不正确。例如 $x^2+y^2+z^2=0$ 只表示空间一个点。

5. 方程组 $\begin{cases}F\left(x, y, z\right)=0\\ G\left(x, y, z\right)=0\end{cases}$ 一定表示空间一曲线吗？

答：不一定。首先，$F\left(x, y, z\right)=0$ 和 $G\left(x, y, z\right)=0$ 不一定都是空间曲面方程。其次，即使它们都是空间曲面，这两曲面也可能不相交，或只相切于空间若干点。甚至也可能相交于空间一曲面。

6. 如何将曲线一般方程$\begin{cases} F\left(x,y,z\right)=0 \\ G\left(x,y,z\right)=0 \end{cases}$化为参数方程？

答：并不是所有曲线的一般方程都能化为参数方程。但若能从一般方程$\begin{cases} F\left(x,y,z\right)=0 \\ G\left(x,y,z\right)=0 \end{cases}$中解出其中两个变量为第三个变量的函数，例如解出 $y=y\left(x\right),\quad z=z\left(x\right)$，则参数方程为

$$\begin{cases} x=t \\ y=y\left(t\right). \\ z=z\left(t\right) \end{cases}$$

7. 利用平面束方程解题时应注意什么？

答：因为平面束方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$ 中并不包含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. 因此在利用上述平面束方程解题时应对平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 是否也符合解题要求进行验证。或者考察在 $\lambda\to+\infty$ 或 $\lambda\to-\infty$ 时，是否符合解题要求。一般来说上述情况下满足解题要求时，平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 也符合解题要求。

另外，若将平面束写成

$$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$$

形式，则它包含了所有过直线$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$的平面。