第五章 积分

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积有什么关系？

答：在 $[a,b]$ 上有原函数的函数 $f(x)$ 未必可积。例如，

设 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$，则 $F'(x)=f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有原函数 $F(x)$，但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 无界，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 不可积。

另外可积的函数也不一定有原函数，例如

$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 可积，但不存在原函数。

2. 对积分上限函数求导时应注意什么？

答：对积分上限函数的求导，就是对上限变量求导，与积分变量没有关系。在遇到积分上限变量含在被积表达式内的情况时，应先设法把上限变量从被积表达式内分离出来，然后再利用积分上限函数求导公式。

例 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x xf(t)\,dt=\dfrac{d}{dx}\left(x\int_0^x f(t)\,dt\right)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2dx \xlongequal{x-t=u} \frac{d}{dx}\int_0^x \sin u^2du=\sin x^2$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)^2dx \xlongequal{x^2-t^2=u} \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)\,du=\frac{1}{2}f(x^2)2x=xf(x^2)$$

3. 可积初等函数的原函数一定是初等函数吗？

答：不一定。例如 $\int e^{x^2}dx,\quad \int\sin x^2dx,\quad \int\dfrac{e^x}{x}dx,\quad \int\dfrac{\sin x}{x}dx,\quad \int\dfrac{1}{\ln x}dx,\quad \int\sqrt{1+x^4}\,dx$ 等都不能用初等函数表示出来。

4. 奇函数或偶函数的原函数是否仍具有奇偶性？

答：奇函数的原函数是偶函数。

设 $F(x)$ 是奇函数 $f(x)$ 的原函数，则 $\left[F(x)-F(-x)\right]'=f(x)+f(-x)=0$，故 $F(x)-F(-x)$ 为常数。但 $F(0)-F(-0)=0$，因此 $F(x)-F(-x)=0$，即 $F(x)$ 是偶函数。

偶函数的原函数不一定是奇函数。例偶函数 $f(x)=\cos x$ 的原函数 $\sin x+C$ 不一定是

奇函数，不过类似于上面证法可得：偶函数的过原点的原函数是奇函数。

5. 周期函数的原函数还是周期函数吗？

答：不一定。例如 $f\left(x\right)=1+\sin x$ 是周期函数，但它的原函数 $F\left(x\right)=x-\cos x+C$ 不是周期函数。不过当周期函数 $f\left(x\right)$ 在一个周期积分为零时，其原函数为周期函数。

6. 单调函数的原函数还是单调函数吗？

答：不一定。例在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内 $f\left(x\right)=x$ 是单调函数，但其原函数 $F\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内不单调。

7. 反函数有求导公式 $\left(F^{-1}\left(y\right)\right)'=\frac{1}{f'\left(x\right)}$，那么反函数的原函数有没有类似的积分公式？

答：设 $F\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的原函数，$x=f^{-1}\left(y\right)$ 是 $y=f\left(x\right)$ 的反函数，则

$$
\begin{aligned}
\int f^{-1}\left(y\right)dy &= yf^{-1}\left(y\right)-\int\left(f^{-1}\left(y\right)\right)' y dy \\
&= yf^{-1}\left(y\right)-\int\frac{1}{f'\left(x\right)}f\left(x\right)f'\left(x\right)dx \\
&= yf^{-1}\left(y\right)-\int f\left(x\right)dx \\
&= yf^{-1}\left(y\right)-F\left(f^{-1}\left(y\right)\right)+C
\end{aligned}
$$

换作 x 为积分变量，则有

$$\int f^{-1}\left(x\right)dx=xf^{-1}\left(x\right)-F\left(f^{-1}\left(x\right)\right)+C$$

8. 对于积分公式 $\int\frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|+C$，有的书上及有的习题答案中却是 $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$，对此如何解释？

答：$\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，一般来说若函数定义域不是一个区间的话应在各区间内分别求其原函数。即

$$\int\frac{1}{x}dx=\begin{cases}\ln x+C_1 & x>0\\ \ln\left(-x\right)+C_2 & x<0\end{cases}$$

这里 C_1 和 C_2 是两个彼此独立的常数。为了方便才记为 $\int\frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|+C$（实际上要少了很多原函数）。而 $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$ 仅给出了 $\frac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 这个区间上的原函数，另一部分省略了。

9. 请问如下计算是否正确？

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

答：不正确。因为对于函数 $f\left(x\right)=\tan x$ 来说，$\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ 是它的间断点，所以不适用牛顿－莱布尼兹公式。正确做法如下：

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{d\cot x}{1+2\cot^2 x}=-\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}$$

值得指出的是：在求不定积分 $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$ 时可以做成

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{x}}+C$$

因对于不定积分一般不要求指出原函数适用区间，只要能算出被积函数在某个区间上的原函数就可以了。

10 能否将广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx$ 的定义换为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx$

答：这定义与教材上无穷区间上广义积分的定义是有区别的。例如求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$，由于 $\frac{x}{1+x^2}$ 为奇函数，故 $\int_{-a}^{a}\frac{x}{1+x^2}dx=0$，因此 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=0$。

但 $\int_{0}^{t}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$，但 $t\to+\infty$ 时是发散的。因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 发散，不过若 $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx$ 收敛，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx$。

11. 计算广义积分时应注意什么？

答：在求原函数时，广义积分与常义积分并无区别。但如果将被积函数分成几项，则应注意每一项都应收敛,或其中只有一项发散(这时原积分发散)。例

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\left(1+x\right)}=\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln x\Big|_{1}^{+\infty}-\ln\left(1-x\right)\Big|_{1}^{+\infty}$$

这就得不到正确结果。应为

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\left(1+x\right)}=\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln\frac{x}{1+x}\Bigg|_{1}^{+\infty}=\ln 2$$

另外对于无界函数的广义积分,应注意无穷间断点应在区间端点时才可按常义积分的方法来积，即当无穷间断点在区间内时，应用无穷间断点将区间分割成若干小区间，然后对每

个小区间进行积分。