第五章　定性和稳定性理论

主讲人：刘兴波

大家知道, 能求出通解的常微分方程是极为有限的, 差不多就是前两章讨论的那些方程类型. 大量非线性方程的求解都尚待研究, 更谈不上用初等函数的积分来表示. 因此就提出直接从微分方程的结构来研究解的性质, 或者研究由微分方程所确定曲线的分布状态及其渐近性质. 这就是十九世纪八十年代初到九十年代初由 H. Poincare 和 A. M. , Liapunov 提出的微分方程定性理论和稳定性理论.

3.1 基本概念

1.动力系统 当一般方程 $x'=f(t,x)$ 中函数 f 不显含 t 时，即

$$x'=f(x),\quad x\in R^n,\quad (n>1), \qquad (5.1.1)$$

则称它为定常系统或驻定系统或自治系统,其中 $f(x)$ 在 R^n 连续，

且保证 (3.1.1) 的解由初值所惟一确定 (如 Lipschitz 条件等)，且解的定义区间都为 R；

于是对 $\xi\in R^n$，(5.1.1) 就有惟一的一个解 $x=\varphi(t,\xi)$ 满足 $\varphi(0,\xi)=\xi$.

从几何上来看,解 $x=\varphi(t,\xi)$ 的积分曲线是 R^{n+1} 空间的图像

$\{(t,x)\in R^{n+1} \mid x=\varphi(t,\xi), t\in R\}$，称为轨线 (trajectory),

积分曲线在相空间上的投影$\left\{x \in R^n \middle| x = \varphi(t, \xi), t \in R\right\}$

是 R^n 中的一条曲线, 称它为一条轨道(orbit) .

称 R^n 为相空间(phase space), 相空间的点称为相点.

当 t 变动时就说相点在轨道上运动.

称相空间中的曲线$\left\{x \in R^n \middle| x = \varphi(t, \xi), t \ge 0\right\}$为正半轨,

称相空间中的曲线$\left\{x \in R^n \middle| x = \varphi(t, \xi), t \le 0\right\}$为负半轨.

称由 (5.1.1) 所确定的全体轨道的集合为一个动力系统.

例如, 对于n阶常方阵A, 系统 $x' = Ax$ 的所有轨道就组成了一个动力系统.

关于 (5.1.1) 的解 $x = \varphi(t, \xi)$ 有如下性质：

性质 5.1.1 若 $x = \varphi(t, \xi)$ 是 (5.1.1) 的解, 则对任给的常数c, $x = \varphi(t + c, \xi)$ 也是 (5.1.1) 的解.

性质 5.1.2 若 $x = \varphi(t, \xi)$ 是 (5.1.1) 的解, 则 $x = \varphi(t + c, \xi)$ 对应的轨道与c 无关, 即对任意常数c, $x = \varphi(t + c, \xi)$ 所对应的是 (5.1.1) 的同一条轨道.

推论 5.1.1 对 $\forall \xi \in R^n$, (5.1.1) 有且只有一条轨道通过点 ξ .

性质 5.1.3 (群性质) 对 $\forall \xi \in R^n$, 都有

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, \xi)) = \varphi(t_1 + t_2, \xi). \qquad (5.1.2)$$

证明: 由性质 1 即知 $\varphi(t,\varphi(t_1,\xi))$ 和 $\varphi(t+t_1,\xi)$ 都是 (5.1.1) 的解, 又当t=0 时, 这两个解均为 $x=\varphi(t_1,\xi)$, 故由解的惟一性即知有 $\varphi(t,\varphi(t_1,\xi))=\varphi(t+t_1,\xi)$, 特别当 $t=t_2$ 时即得 (5.1.2) 式. 证毕

2.平衡点及其稳定性.

如果 存在 $x_0\in R^n$ 使得 $f(x_0)\neq 0$, 则称 x_0 为 系统 的 常点。

如果 存在 $x_e\in R^n$ 使得 $f(x_e)=0$, 则称x_0为 系统 的 平衡点 。

命题 5.1.1 若 x_e 为(5.1.1)的平衡点, 则对任何不同于 x_e 的轨道不可能在有限时间到达或趋于 X_e.

证明: 反证, 若定理结论不真, 则存在 (5.1.1) 的一个非定常解 x(t) 和有限的时刻 τ , 使得当 $t \to \tau$ 时有 $x(t) \to x_e$, 由x (t) 的连续性即知 $x(\tau)=x_e$, 由此即见过 x_e 有两条轨道, 这与上面的性质 5.1.2 矛盾. 命题证毕.

推论 5.1.2　若 (5.1.1) 的解 $\varphi(t)$, 当 $t \to \tau$ 时,有 $\varphi(t)$ 趋于 (5.1.1) 的平衡点 x_e, 则必有 $\tau = +\infty$ 或 $-\infty$.

命题 5.1.2　若在 x_0 的任意小邻域内, 都存在时间长度为任意大的轨道弧, 则 x_0 必为平衡点.

证明： 用反证法, 若 x_0 不是平衡点, 则必存在时刻 t^*,

使得 $\varphi(t^*, x_0) \neq x_0$, 记 x_0 与 $\varphi(t^*, x_0)$ 之间的距离

$$d\left(\varphi\left(t^*, x_0\right), x_0\right) = \rho > 0.$$

根据解对初值的连续性, 对给定的 $\varepsilon = \frac{\rho}{3} > 0$, 存在 $\delta > 0, \delta < \varepsilon$,

使得对一切满足 $d(x_0, x_1) < \delta < \frac{\rho}{3}$ 的 x_1, 都有

$$d\left(\varphi\left(t^*, x_0\right), \varphi\left(t^*, x_1\right)\right) < \varepsilon = \rho/3 .$$

即由点 x_0 的 δ 邻域内出发的轨道, 经时间长度为 t^* 之后.

都离开这个邻域, 这与命题中的假设矛盾. 命题得证

定义: 我们称系统 (5.1.1) 的平衡点 x_e 在李雅普诺夫(Liapunov)意义下是稳定的.

如果对 x_e 的任一邻域 U, 总存在一个 x_e 的邻域 $U_1 \subset U$, 使得系统 (5.1.1) 的在 t=0 时位于 U_1 内的轨道在 t>0 时始终位于 U 中. 否则就称平衡点 x_e 不稳定.

如果平衡点 x_e 是稳定的, 并且存在 x_e 的一个邻域 U_0, 使得系统 (5.1.1) 的在 t=0 时位于 U_0 内的轨道 x (t) 满足 $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$, 则称 (5.1.1) 的平衡点 x_e 是渐近稳定的.

吸引域: U_0 称为是 (5.1.1) 的平衡点的吸引域.

如果$U_0 = R^n$, 则称 (5.1.1) 的平衡点是全局渐近稳定的.

考虑n 维常系数线性系统 $x' = Ax$ 的平衡点的稳定性

我们只讨论 A 为n阶非奇异实常方阵的情况. 这时系统的平衡点是唯一的: x=0. 方程的标准基解阵为 $\exp(At)$, 由标准基解阵的形式容易证明如下定理:

定理 5.1.1

1. 若 A 的特征值都具有负实部, 则方程的平衡点是渐近稳定的;

2. 若A 的特征值至少有一个正实部, 则方程的平衡点是不稳定的;

3. 若 A 没有正实部特征值, 但有零实部特征值, 且对于每一个重数为 $\tilde{n}$ 的零实部特征值 $\tilde{\lambda}$, 方阵 $A-\tilde{\lambda}I$ 的秩均为 $n-\tilde{n}$, 则方程的平衡点是稳定的, 但不是渐近稳定的;

4. 若A没有正实部特征值, 但有零实部特征值, 且至少有一个重数为 $\tilde{n}$ 的零实部特征值 $\tilde{\lambda}$, 方阵 $A-\tilde{\lambda}I$ 的秩大于 $n-\tilde{n}$, 则方程的平衡点是不稳定的.

三、周期解和闭轨

如果系统 (5.1.1) 的解 $\varphi(t), t \in R$ 是 t 的周期函数, 即存在 $\omega > 0$, 使得对一切 $t \in R$, 有 $\varphi(t+\omega)=\varphi(t)$, 则称 $\varphi(t)$ 为 (5.1.1) 的周期解, 而称 ω 为它的周期.

从几何上看, 在 R^{n+1} 空间中, 周期解的积分曲线是一条以最小正周期为螺距的螺旋线, 而其对应的轨道是在相空间 R^n 中的一条闭曲线; 不是定常解的周期解所对应的轨道称为闭轨.

命题 5.1.3 不是常值的连续的周期函数具有最小正周期. 且这个周期函数的周期都是最小正周期的正整数倍. 因此闭轨对应的解具有最小正周期.

四. 轨道的极限集合

定义: 设 $\ell: x=\varphi(t,p), t\in R$ 为系统 (5.1.1) 的任一轨道; 如果存在时间 t 的序列 $\{t_k\}$, 当 $k\to\infty$时, 有 $t_k\to\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k,p)=q\in R^n, \qquad (5.1.4)$$

则称点 q 为轨道 ℓ 或正半轨 ℓ^+ 的ω极限点.

若存在时间 t 的序列 $\{t_k\}$, 当$k\to\infty$时, 有 $t_k\to-\infty$, 使得 (5.1.4) 成立, 则称点 q 为轨道 ℓ 或负半轨 ℓ^- 的α 极限点.

轨道ℓ的所有ω 极限点组成的集合称为它的 ω 极限集合。并记作 Ω_{ℓ};

轨道ℓ的所有α 极限点组成的集合称为它的 α 极限集合,并记作 A_{ℓ}.

定理 5.1.2 有界轨道 ℓ的极限集$\Omega_{\ell}(\mathrm{A}_{\ell})$是一个非空、有界、闭的连通集合, 且 $\Omega_{\ell}(\mathrm{A}_{\ell})$ 等于若干整条轨道的并集.

证明: 由于ℓ的有界性，故$\Omega_{\ell}(\mathrm{A}_{\ell})$是一个非空有界集. 由极限集合的定义知 $\Omega_{\ell}(\mathrm{A}_{\ell})$为闭集.

再证明其连通性. 反证, 若集合 Ω_{ℓ} 不连通, 则存在非空的分离的集合 $\Omega_{1\ell}$ 和$\Omega_{2\ell}$， 使得 $\Omega_{\ell}=\Omega_{1\ell}\bigcup\Omega_{2\ell}$, 由 Ω_{ℓ} 的有界性得 $\Omega_{1\ell}$ 和$\Omega_{2\ell}$的有界性。

由Ω_ℓ 是闭集及 $\Omega_{1\ell}$ 和$\Omega_{2\ell}$ 的分离性，得 $\Omega_{1\ell}$ 和$\Omega_{2\ell}$ 是闭集.

由于两个不相交的有界闭集之间的距离为正, 因此 $\Omega_{1\ell}$ 和$\Omega_{2\ell}$ 之间的距离

$$d\left(\Omega_{1\ell}, \Omega_{2\ell}\right) = \rho > 0.$$

设对应于轨道 ℓ 的解为 $x = \varphi(t, p)$, 于是存在数列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots$, 使得

$$d\left(\varphi\left(t_{2k+1}\right), \Omega_{1\ell}\right) \to 0, \quad d\left(\varphi\left(t_{2k}\right), \Omega_{2\ell}\right) \to 0, \quad \text{当}k \to +\infty, \text{即}t_k \to +\infty\text{时}.$$

从而存在自然数 N, 使得对每个 k>N 都有 $t_k^* : t_{2k} < t_k^* < t_{2k+1}$, 它满足

$$d\left(\varphi\left(t_k^*, p\right), \Omega_{i\ell}\right) \geq \rho/4, \quad i = 1, 2; \quad k > N.$$

由ℓ的有界性即知序列$\varphi(t_k^*, p)\quad (k>N)$必存在极限点$x_0$, 显然$x_0 \in \Omega_\ell$,

且$d(x_0, \Omega_{i\ell}) \geq \rho/4$, $\quad i=1,2.$ 从而$x_0 \notin \Omega_{1\ell} \cup \Omega_{2\ell}$, 这就与$\Omega_\ell = \Omega_{1\ell} \cup \Omega_{2\ell}$

矛盾, 故Ω_ℓ应为连通集.

设$q \in \Omega_\ell$, $q_1 = \varphi(t_1, q)$为过q点的轨道上的任一点， 由于q 是

$\varphi(t, p)$的ω极限点, 所以存在序列$\{\mathrm{t_k}\}$, $\mathrm{k}=1,2,\cdots$, $\mathrm{t_k} \to +\infty$, 使得

$\varphi(\mathrm{t_k}, \mathrm{p}) \to \mathrm{q}$, $\mathrm{k} \to +\infty$.由解的群性质 5.1.2 与解对初值的连续性, 当

$\mathrm{t_k} \to +\infty$时有

$$\varphi(t_1+t_k, p) = \varphi(t_1, \varphi(t_k, p)) \to \varphi(t_1, q) = q_1,$$

即$\bar{t}_k := t_1 + t_k \to +\infty$,且$\varphi(\bar{t}_k, p) \to q_1$, 这说明$q_1$也是轨道$\varphi(t, p)$的$\omega$

极限点, 由 q 和t_1的任意性, Ω_ℓ等于若干整条轨道的并集.

同理可证A_ℓ的情况.　证毕

推论 5.1.3 若ℓ是系统(5.1.1)的任一闭轨, 则$\Omega_\ell = A_\ell = \ell$.

推论 5.1.4 若有界轨道ℓ的$\omega(\alpha)$极限集合$\Omega_\ell\,(A_\ell)$是只由一点q构成的, 即$\Omega_\ell\,(A_\ell) = \{q\}$, 则q 必为平衡点, 并且当$t\to+\infty(-\infty)$时轨道$\ell$趋向于这个平衡点. 反之, 若当$t\to+\infty(-\infty)$时轨道$\ell$趋向于一个点q, 则q必为平衡点, 且有$\Omega_\ell\,(A_\ell) = \{q\}$.

注：如果轨道L上的每一点都是轨道ℓ的$\omega(\alpha)$极限点, 则称L 为ℓ的$\omega(\alpha)$极限轨道