§3.5 连续依赖性定理

定理 3.5 设方程(3.1)的右端函数含有参数 μ，即

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{3.23}$$

设 $f(x,y,\mu)$ 在

$$\bar{\mathbf{R}}_\mu : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, \mu_0 \le \mu \le \mu_1$$

上连续，且关于y满足Lipschitz条件，则由初值 (x_0, y_0) 所确定的解 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \mu)$ 关于变量 (x, x_0, y_0, μ) 是连续的.

类似于定理3.1的证明，我们构造Picard逐次逼近序列

$$\varphi_0(x;x_0,y_0,\mu)=y_0$$

$$\varphi_1(x;x_0,y_0,\mu)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi_0(s;x_0,y_0,\mu))\mathrm{d}s,$$

$$\cdots$$

$$\varphi_{n+1}(x;x_0,y_0,\mu)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi_n(s;x_0,y_0,\mu))\mathrm{d}s,$$

$$\cdots$$

作为 (x,x_0,y_0,μ) 的函数，Picard序列 $\{\varphi_n(x;x_0,y_0,\mu)\}$ 在某一闭区域上都是连续函数. 同样对含有 (x_0,y_0,μ) 时, 仍然可得相应的估计式

$$|\varphi_n(x;x_0,y_0,\mu)-\varphi(x;x_0,y_0,\mu)|\le\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad (3.24)$$

从中容易看出, $\varphi_n(x;x_0,y_0,\mu)$ 在 (x,x_0,y_0,μ) 的某一闭区域上一致收敛于 $\varphi(x;x_0,y_0,\mu)$, 所以其极限函数 $\varphi(x;x_0,y_0,\mu)$ 关于变量 (x,x_0,y_0,μ) 都是连续的.

§ 3.6 可微性定理

考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (3.25)$$

的解 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \mu)$ 关于初值 x_0, y_0, μ 的偏导数

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ 的存在性和连续性的问题. 它们反映了解对初值和参数变化的敏感程度.

定理3.6 若函数 $f(x,y,\mu), f_y(x,y,\mu), f_\mu(x,y,\mu)$ 在 $\overline{\mathbf{R}}_\mu$ 上连续，则初值问题(3.25)存在唯一解 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\mu)$，它作为(x,x_0,y_0,μ)的四元函数是连续可微的；此外，

$\varphi_{x_0}(x;x_0,y_0,\mu), \varphi_{y_0}(x;x_0,y_0,\mu)$ 作为x的函数是线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_y(x,\varphi(x;x_0,y_0,\mu),\mu)z \tag{3.26}$$

分别满足初始条件 $z(x_0)=-f(x_0,y_0,\mu)$ 和 $z(x_0)=1$ 的解；而

$\varphi_\mu(x;x_0,y_0,\mu)$ 作为x的函数是线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_y(x,\varphi(x;x_0,y_0,\mu),\mu)z+f_\mu(x,\varphi(x;x_0,y_0,\mu),\mu) \tag{3.27}$$

满足初始条件 $z(x_0)=0$ 的解.

注3.9 线性方程(3.26)和(3.27)都是从原方程(3.25)诱导出来的，通常把这些方程以及相应的初值问题分别称为原方程(3.25)关于解 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\mu)$ 对 x_0,y_0,μ 的变分方程及变分问题.

如果已知 $\varphi_{x_0}(x;x_0,y_0,\mu),\varphi_{y_0}(x;x_0,y_0,\mu),\varphi_{\mu}(x;x_0,y_0,\mu)$ 存在连续，则可以从初值问题(3.25)等价的积分方程

$$\varphi(x;x_0,y_0,\mu)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s;x_0,y_0,\mu),\mu)\mathrm{d}s \qquad (3.28)$$

中两边直接对 x_0,y_0,μ 分别求偏导即可得它们所满足的相应变分问题.

注3.10 一般来说，

$$\varphi_{x_0}(x;x_0,y_0,\mu),\varphi_{y_0}(x;x_0,y_0,\mu),\varphi_{\mu}(x;x_0,y_0,\mu)$$

的计算仍然依赖于原方程(3.25)的解 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\mu)$

但我们可以对某些特定的初值 x_0,y_0 计算它们的偏导数.

例3.6 设 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\mu)$是初值问题

$$\begin{cases} y'=\sin\dfrac{y\mu}{x} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解. 试求 $\varphi'_{x_0}(x;1,0,\mu),\varphi'_{y_0}(x;1,0,\mu),\varphi'_{\mu}(x;1,0,\mu)$.

解：从变分问题

$$\begin{cases} \eta' = (\dfrac{\mu}{x}\cos\dfrac{\varphi\mu}{x})\eta \\ \eta(x_0) = -\sin\dfrac{y_0\mu}{x_0} \end{cases}$$

中可以解出

$$\varphi_{x_0}(x;x_0,y_0,\mu) = -\sin\frac{y_0\mu}{x_0}\exp\{\int_{x_0}^{x}\frac{\mu}{s}\cos\frac{\varphi\mu}{s}\mathrm{d}s\}.$$

因此 $\varphi_{x_0}(x;1,0,\mu) = 0;$

同样，从变分问题

$$\begin{cases} \eta' = (\dfrac{\mu}{x}\cos\dfrac{\varphi\mu}{x})\eta \\ \eta(x_0) = 1 \end{cases}$$

中可以解出

$$\varphi_{y_0}(x;x_0,y_0,\mu)=\exp\{\int_{x_0}^{x}\frac{\mu}{s}\cos\frac{\varphi\mu}{s}\mathrm{d}s\}.$$

注意：由惟一性知 $\varphi(x;1,0,\mu)\equiv 0$, 因此

$$\varphi_{y_0}(x;1,0,\mu)=\exp\{\int_{1}^{x}\frac{\mu}{s}\mathrm{d}s\}=x^{\mu};$$

从变分问题

$$\begin{cases}\eta'=(\frac{\mu}{x}\cos\frac{\varphi\mu}{x})\eta+\frac{\varphi}{x}\cos\frac{\varphi\mu}{x},\\ \eta(x_0)=0.\end{cases}$$

中可以解出

$$\varphi_\mu(x;x_0,y_0,\mu)=\exp\{\int_{x_0}^{x}\frac{\mu}{s}\cos\frac{\varphi\mu}{s}\mathrm{d}s\}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi}{t}\cos\frac{\varphi\mu}{t}\exp\{-\int_{x_0}^{t}\frac{\mu}{s}\cos\frac{\varphi\mu}{s}\mathrm{d}s\}\mathrm{d}t.$$

因为 $\varphi(x;1,0,\mu)\equiv 0,$ 所以 $\varphi_\mu(x;1,0,\mu)=0.$