

华中农业大学 2016 年硕士研究生入学考试
试 题 纸

科目代码及名称：611 数学

注意：所有答案必须写在答题本上，不得写在试题纸上，否则无效。

一、单项选择题（共 24 分，每题 3 分）

1、当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $\sqrt[2016]{1+\sqrt{x}} - 1$ 的等价无穷小是（ ）

- A. \sqrt{x} B. $2016\sqrt{x}$ C. $\frac{\sqrt{x}}{2016}$ D. $\frac{x}{2016}$

2、设 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+1) = af(x)$ ，且 $f'(0) = b$ ，则必有（ ）

- A. $f'(1) = a$ B. $f'(1) = b$ C. $f'(1) = ab$ D. $f'(1)$ 不存在

3、下列说法中正确的是（ ）

- A. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续是函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充分条件
B. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导是函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极限的充分条件
C. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限不存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续的必要条件
D. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义的必要条件

4、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} =$

- A. $\frac{1}{2e}$ B. $-\frac{1}{2e}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

5、设 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ ，则 $y^{(n)}$ =

A. $\frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$ B. $\frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$

C. $\frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n} \right]$ D. $\frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n} \right]$

6、设 $z = f(x^2 + y^2)$ 具有二阶偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

- A. $2yf''$ B. $2xyf''$ C. $2xy^2f''$ D. $4xyf''$

7、若向量组 $\{\alpha_1 = [1,1,0]^T, \alpha_2 = [1,3,-1]^T, \alpha_3 = [5,3,t]^T\}$ 线性相关, 则 $t =$ ()

- A.1 B.-1 C.2 D.-2

8、据资料报导, 中国目前互联网普及率约为 50%, 在人群中有 20% 是青年人, 他们使用互联网的概率约为 70%, 则不是青年人使用互联网的概率为 ()

- A.0.15 B.0.3 C.0.36 D.0.45

二、填空题 (共 36 分, 每空 4 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin \frac{2015}{x} + \frac{2016}{x} \sin x) =$ _____.

2、曲线 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程为 _____,
法线方程为 _____.

3、 $\int_0^1 dy \int_{3y}^3 e^{x^2} dx$ 交换积分次序后得 _____, 该积分值为 _____.

4、微分方程 $y'' - 4y' + 13y = 0$ 的特征方程为 _____, 该微分方程的通解为 _____.

5、通过三点 $(1,1,1), (2,3,-1), (3,-1,-1)$ 的平面方程为 _____.

6、设 (X,Y) 在区域 $\{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ 内服从均匀分布, 在十次重复独立观察中事件 $\{X \geq Y\}$ 出现的次数为 Z , 则 $P\{Z = 2\} =$ _____.

三、解答题 (共 40 分, 每题 8 分)

1、讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a+x^{2n}}$ ($a \neq 0$) 的连续性, 如有间断点, 说明间断点的类型.

2、曲线弧 $y = \cos x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与 x 轴围成的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转所得的旋转体体积.

3、求从原点到曲面 $(x-z)^2 - y^2 = 1$ 的最短距离.

4、确定函数 $f(x) = (x^2 - 4) \sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间并讨论其凹凸性和拐点.

5、已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 通过正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$ 可化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用正交变换矩阵 \mathbf{C} .

四、证明题 (共 36 分, 每题 12 分)

1、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \text{ 试证:}$$

(1) $\exists \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

2、设 A, B 为 n 阶方阵, 若 $AB = A+B$, 证明: $A - I$ 可逆且 $AB = BA$.

3、若 $X \sim E(\lambda)$, 证明: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

五、应用题 (共 14 分)

某大学有 20000 名在校生, 设每人以 60% 的概率去图书馆上自习, 且每名同学去图书馆自习相互独立. 如果要保证去图书馆上自习的同学都有座位的概率达到 95%, 问该大学图书馆至少应设多少座位? ($\Phi(1.65) = 0.95$)