暨南大学复变函数教学课件

暨南大学数学系

高凌云

二0一一年九月至二0一二年一月

Department of Mathematics
Jinan Univ. 2011

复变函数起源简介

- 数学从产生、有发展到现在，已成为分支众多的学科了，复变函数是其中一个非常重要的分支。以复数作为自变量的函数就叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论。解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要就研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论，简称函数论。
- 我们知道，在解实系数一元二次方程 ax^2+bx+x=0 (a≠0) 时，如果判别式 b^2-4ac<0，就会遇到负数开平方的问题，最简单的一个例子是在解方程 x^2+1=0 时，就会遇到开平方的问题。

复变函数起源简介

- 十六世纪中叶，意大利卡尔丹(Cardan,1545)在解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想，他把50看作5+5i与5-5i的乘积，然而这只不过是一种纯形式的表示而已，当时，谁也说不上这样表示究竟有什么好处。
- 为了使负数开平方有意义，也就是要使上述这类方程有解，我们需要再一次扩大数系，于是就引进了虚数，使实数域扩大到复数域。但最初，由于对复数的有关概念及性质了解不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，因而，长期以来，人们把复数看作不能接受的“虚数”。

复变函数起源简介

- 直到十七世纪和十八世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变。另外的原因，是这个时期复数有了几何的解释，并把它与平面向量对应起来解决实际问题的缘故。
- 复变函数论产生于十八世纪。1774 年，欧拉在他的一篇论文中考虑了由复变函数的积分导出的两个方程。而比他更早时，法国数学家达朗贝尔在他的关于流体力学的论文中，就已经得到了它们。因此，后来人们提到这两个方程，把它们叫做“达朗贝尔- 欧拉方程”。

复变函数起源简介

- 到了十九世纪，上述两个方程在柯西和黎曼研究流体力学时,作了更详细的研究，所以这两个方程也被叫做“柯西- 黎曼条件”。关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉（Euler）作出的。他在1777 年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数之间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并开始把它们用到水力学和地图制图学上，用符号“i”作为虚数的单位，也是他首创的。此后，复数才被人们广泛承认和使用。

复变函数起源简介

- 在复数域内考虑问题往往比较方便，例如，一元n 次方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq 0)$，其中$a_0$、$a_1$、…$a_n$ 都是复数，在复数域内恒有解。这就是著名的代数学基本定理，它用复变函数来解决是非常简洁的。又如，在实数域内负数的对数无意义，而在复数域内我们就可以定义负数的对数。

复变函数起源简介

- 复变函数论的全面发展是在十九世纪，就像微积分的直接扩展统治了十八世纪的数学那样，复变函数这个新的分支统治了十九世纪的数学。当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且称为这个世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一。在十九世纪，复变函数的理论经过法国数学家柯西(Cauchy) 、德国数学家黎曼(Riemann) 和维尔斯特拉斯(Weierstrass)的巨大努力，已经形成了非常系统的理论，并深刻地渗入到代数学、解析数论、概率统计、计算数学和拓扑学等数学分支；同时,它在热力学、流体力学、和电学等方面也有很多的应用。

复变函数起源简介

- 二十世纪以来，复变函数已经被广泛应用到理论物理、弹性理论和天体力学等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切。致使经典的复变函数理论，如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用。并且，还开辟了一些新的分支，如复变函数逼近论、黎曼曲面、单叶解析函数论、多复变函数论、广义解析函数论以及拟保形变换等。另外，在种种抽象空间的理论中，复变函数还常常为我们提供新思想的模型。

复变函数起源简介

- 为复变函数论的创建做了最早期工作的是欧拉、达朗贝尔，法国的拉普拉斯也随后研究过复变函数的积分，他们都是创建这门学科的先驱。

  后来为这门学科的发展作了大量奠基工作的要算是柯西、黎曼和德国数学家维尔斯特拉斯。二十世纪初，复变函数论又有了很大的进展，维尔斯特拉斯的学生，瑞典数学家列夫勒、法国数学家彭加勒、阿达玛等都作了大量的研究工作，开拓了复变函数论更广阔的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献。

复变函数起源简介

- 从柯西算起，复变函数论已有170 多年的历史了。它以其完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分。它曾经推动过一些学科的发展，并且常常作为一个有力的工具被应用在实际问题中。现在，复变函数论中仍然有不少尚待研究的课题，所以它将继续向前发展，并将取得更多应用。

复变函数起源简介

- 从20世纪30年代开始，以华罗庚、熊庆来、庄圻泰、李国平、余家荣、杨乐与张广厚为代表的我国数学家在单复变和多复变函数方面，做过许多重要的工作。在20世纪40年代、50年代，我国著名的数学家华罗庚在多复变数典型域上的调和分析方面，作过许多工作，其工作在调和分析、复分析、微分方程等的研究中，有着广泛的影响。在70年代，我国著名的数学家杨乐、张广厚在单复变函数的值的分布和渐近值理论中，得到了首创性的重要成果。从80年代开始，我国的数学工作者在数学的各个领域中开展了富有成效的研究工作，这些都受到国际数学界的高度重视。

- 复变函数已成为我校的精品课程，其网址是：
- http://math.jnu.edu.cn:8070/fbhs/
- 或
- http://202.116.0.180/xjjpkc/2010/fbhs/

暨南大学复变函数教学课件

第一章　复数与复平面
第二章　复变函数
第三章　复变函数的积分
第四章　级数
第五章　留数
第六章　保形映射

Department of Mathematics

第一章　复数与复平面

第一节　复数及其几何表示

第二节　复平面上的拓扑

第一章　复数与复变函数

- 第一节　复数
- 1　复数域
- 2　复平面
- 3　复球面及无穷大

1、复数域:

（1）**复数** 每个复数具有 $z = x + iy$的形状，其中x和y是实数，i是虚数单位(−1的平方根)。x和y分别称为的实部和虚部，分别记作:

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$$

复数和复数相等是指它们的实部与虚部分别相等

如果Imz=0，则z可以看成一个实数;

如果Imz不等于零，那么称z为一个虚数;

如果Imz不等于零，而Rez=0，则称z为一个纯虚数

例1 实数m取何值时,复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$是(1)实数; (2)纯虚数.

解 令 $x=m^2-3m-4$, $y=m^2-5m-6$,

(1) 如果复数是实数,则$y=0$,

由$m^2-5m-6=0$知$m=6$或$m=-1$.

(2) 如果复数是纯虚数,则$x=0$且$y\neq 0$,

由$m^2-3m-4=0$知$m=4$或$m=-1$.

但由$y\neq 0$知$m=-1$应舍去. 即只有$m=4$.

（2）复数的四则运算:

复数的四则运算定义为:

$$(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

$$\frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

复数在四则运算这个代数结构下，构成一个**复数域**(对加、减、乘、除运算封闭），记为 C，复数域可以看成实数域的扩张。

例2 将下列复数表示为 $x+iy$ 的形式.

$$(1)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7; \qquad (2)\ \frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}.$$

解

$$(1)\ \frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i,$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

$$(2)\ \frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}=\frac{-1-2i}{1+i}$$

$$=\frac{(-1-2i)(1-i)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例3 设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$$= \frac{(-15-20)+(15-20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例4 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\cdot\bar{z}$.

解 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$

$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},$

$z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$

例5 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1,\quad z_2 = x_2 + iy_2,$

证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

证 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$+ (x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

或 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

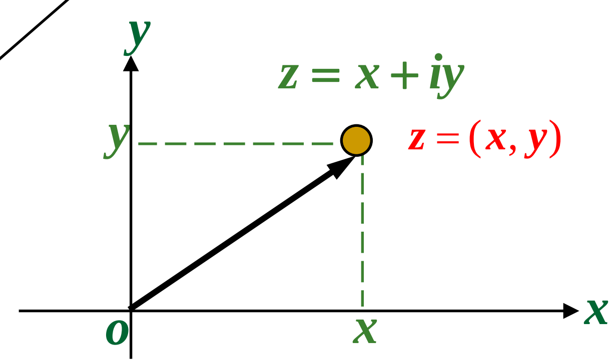
2、复平面

复数 $z = x + iy$ 与有序实数对 (x, y) 成一一对应. 因此, 一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数, 通常把横轴叫实轴或 x 轴, 纵轴叫虚轴或 y 轴. 这种用来表示复数的平面叫复平面.

复数的向量表示法

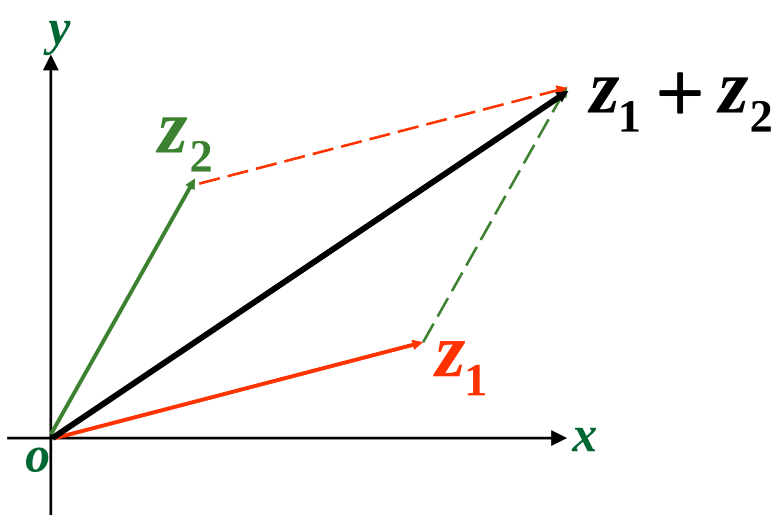
复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的点 (x, y) 表示.

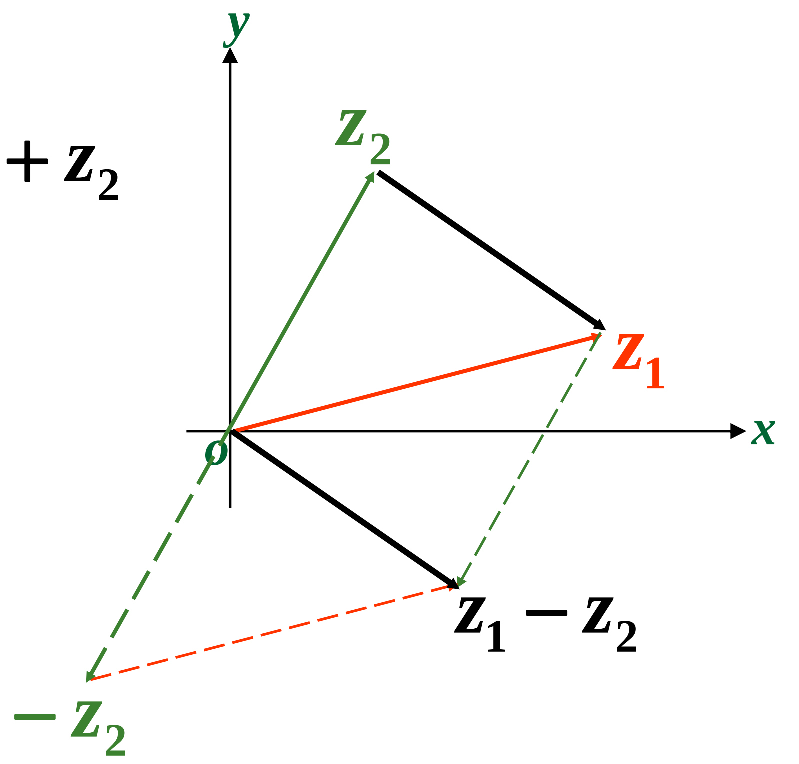
复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的点向量 $\overrightarrow{oz}$ 表示.



结论:

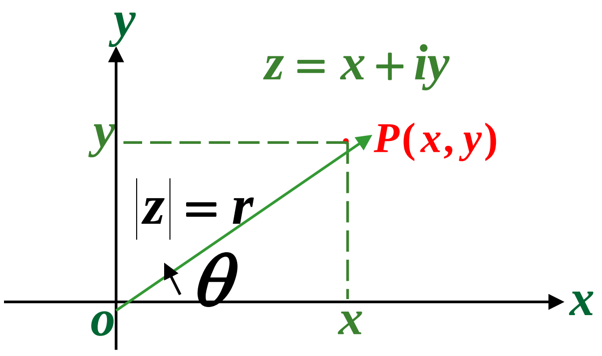
两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.





3、复数的模与辐角

在复平面上,复数 z 与从原点指向点$z = x + iy$的平面向量成一一对应,因此,复数z也可用向量$\overrightarrow{OP}$来表示.



复数的模(或绝对值):

向量的长度称为 z 的模或绝对值,

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$

模的性质

$$|x| \le |z|, \quad |y| \le |z|, \quad |z| \le |x| + |y|, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

三角不等式 (1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; (2) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.

复数的辐角:

在 $z \ne 0$ 的情况下,以正实轴为始边,以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角,记作 $\mathrm{Arg}z = \theta$. 当 $z = 0$ 时,$|z| = 0$,而辐角不确定.

任何一个复数 $z \ne 0$ 有无穷多个辐角.

如果 θ_1 是其中一个辐角,那么 z 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}\,z = \theta_1 + 2k\pi \; (k\text{为任意整数}).$$

辐角的主值

在 $z(\neq 0)$ 的辐角中, 把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 Argz 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

$z \neq 0$

$$\text{辐角的主值} \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

三角表示法

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$

复数可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

指数表示法

利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$

复数可以表示成 $z = re^{i\theta}$

称为复数 z **的指数表示式.**

4、复数的乘幂与方根

1) 乘积与商

两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

若 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,

则有 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

几何意义

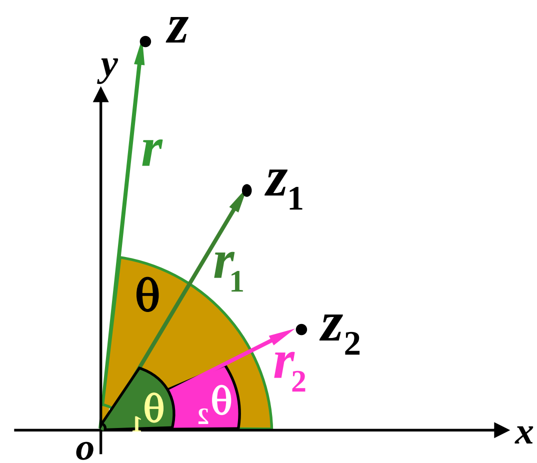
从几何上看，两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$，$\vec{z}_2$，

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2，

再把它的模扩大到 r_2 倍，

所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



复数相乘就是把模相乘，辐角相加.

两个复数的商的模等于它们的模的商; 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

若 $$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则有 $$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}z_2 - \mathrm{Arg}z_1.$$

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \text{则} \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}.$$

2) 幂与根

(a) n次幂:

n个相同复数z的乘积称为z的n次幂,

记作z^n, $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}.$

对于任何正整数n, 有 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

n为负整数时, 有$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

因而有 $\quad |z^n| = |z|^n, \qquad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z.$

(b)棣莫佛公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

(c) 计算方程 $w^n = z$ 的根 w, 其中 z 为已知复数.

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

在几何上, $\sqrt[n]{z}$的n个值就是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$为半径的圆的内接正n边形的n个顶点.

复数的方根　　（开方）——乘方的逆运算

问题　给定复数$z=re^{i\theta}$，求所有的满足$\omega^n=z$的复数ω.

当$z\neq 0$时，有n个不同的ω值与$\sqrt[n]{z}$相对应，每一个这样的ω值都称为z的n次方根，　记$\omega=\sqrt[n]{z}$

$$\text{设 } \omega=\rho e^{i\varphi}, \text{由 } \omega^n=z, \text{ 有 } \rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}$$

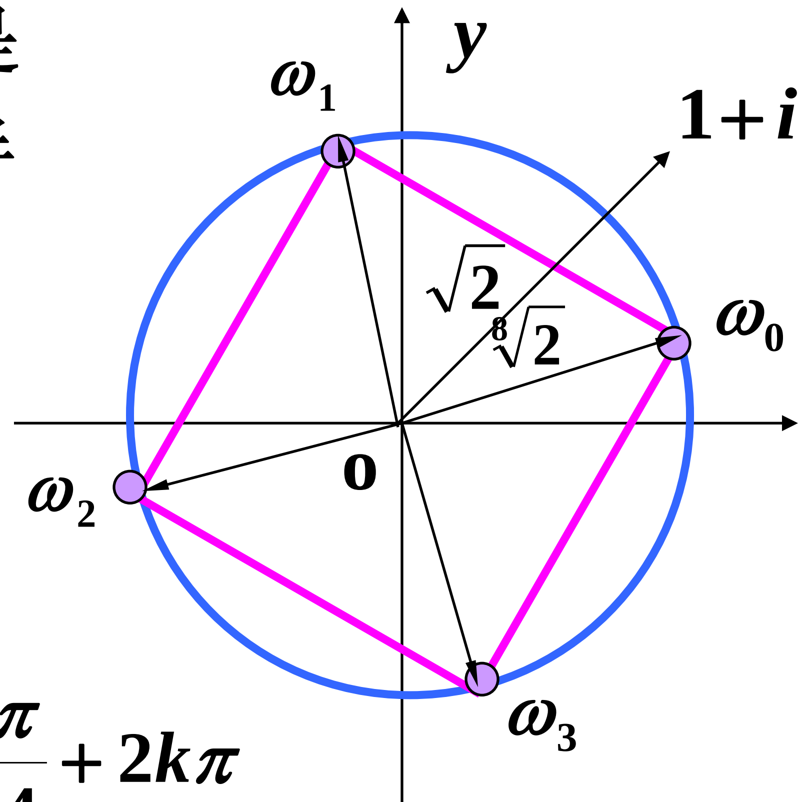
$$\Rightarrow \rho^n=r, \quad n\varphi=\theta+2k\pi \quad (k\in Z)$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

当k=0，1，…，n−1时，可得n个不同的根，而k取其它整数时，这些根又会重复出现.

几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的n个值是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上n个等分点，即它们是内接于该圆周的正n边形的n个顶点.



如 $\omega_k=\sqrt[4]{1+i}$

$$=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3)$$（见图）

例2 求 $\sqrt[3]{-8}$.

解： $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

$$\left(\sqrt[3]{-8}\right)_k=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3}\right)$$

$$k=0,1,2$$

当$k=0$时，$\left(\sqrt[3]{-8}\right)_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i$

当$k=1$时，$\left(\sqrt[3]{-8}\right)_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi+\pi}{3}\right)=-2$

当$k=2$时$\left(\sqrt[3]{-8}\right)_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{4\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi+\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}i$

例、求所有值: $\sqrt[4]{(1+i)}$

解: 由于

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

所以有

$$\sqrt[4]{(1+i)}=\sqrt[8]{2}[\cos\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\sin\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]$$

$$\sqrt[4]{(1+i)}=\sqrt[8]{2}[\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})]$$

$k=0,1,2,3$ 有四个根。

例6 求 $\cos 3\theta$ 及 $\sin 3\theta$ 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 表示的式子

解：

$$\because (\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$\therefore \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

基本不等式:

关于两个复数的和与差的模，有以下不等式:

(1)、$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

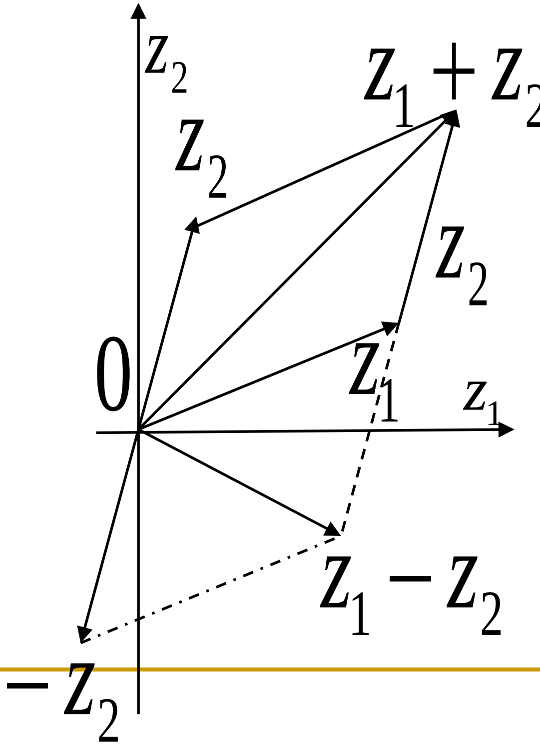
(2) $|z_1+z_2|\ge||z_1|-|z_2||$

(3) $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$

(4) $|z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||$

(5) $|\operatorname{Re} z|\le|z|,|\operatorname{Im} z|\le|z|$

(6) $|z|^2=z\bar{z}$



例7 试用复数表示圆的方程:

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

其中， a, b, c, d是实常数。

解： 利用

$$z\bar{z}=x^2+y^2,$$

$$z+\bar{z}=2x,$$

$$z-\bar{z}=2y$$

得：$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$

其中，$\beta=\frac{1}{2}(b+ic).$

例8: 设z_1、z_2是两个复数，证明:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$$

$$\overline{\overline{z_1}}=z_1$$

证明：设$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$

则，$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}$

$$=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$

$$=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)$$

$$=x_1-iy_1+x_2-iy_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

$$\text{则}, \overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}$$

$$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$= [x_1x_2 - (-y_1)(-y_2)]$$

$$- i[x_1(-y_2) + (-y_1)x_2]$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

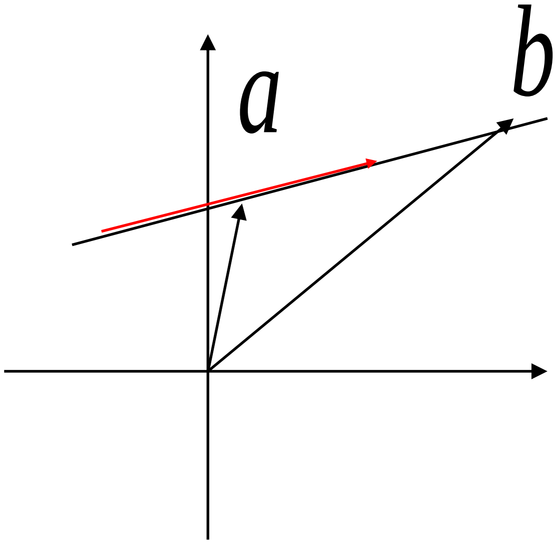
$$\overline{\overline{z_1}} = \overline{\overline{x_1 + iy_1}} = \overline{x_1 - iy_1} = z_1$$

例9、作出过复平面C上不同两点a, b的直线及过不共线三点 a, b, c的圆的表示式。

$$\arg\frac{z-a}{b-a}=0,\pm\pi$$

即$\dfrac{z-a}{b-a}$是实数，所以

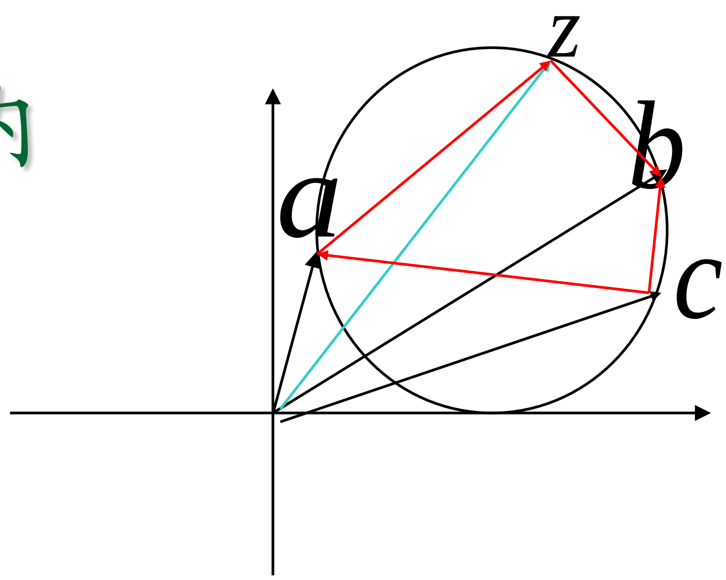
直线: $\mathrm{Im}\dfrac{z-a}{b-a}=0$



例9、作出过复平面C上不同两点a, b的直线及过不共线三点 a, b, c的圆的表示式。

$$\arg\frac{z-a}{z-b}-\arg\frac{c-a}{c-b}=0,\pm\pi$$

a, c, b, z构成一个圆内接四边形或在同侧



$$圆:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\bigg/\frac{c-a}{c-b}\right)=0$$

例11　将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

$$(1)\ z=-\sqrt{12}-2i; \qquad (2)\ z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5};$$

$$(3)\ z=\frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}.$$

解　$(1)\ r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, 因为 z 在第三象限,

所以 $\theta=\arctan\left(\dfrac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\dfrac{5}{6}\pi$,

故三角表示式为 $z=4\left[\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)\right]$,

指数表示式为 $z=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$　　显然 $r=|z|=1$,

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

故三角表示式为 $z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$,

指数表示式为 $z=e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

(3) $z=\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$.

因为 $\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi=e^{5\varphi i}$,

$\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi=\cos(-3\varphi)+i\sin(-3\varphi)=e^{-3\varphi i}$,

所以 $\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}=\dfrac{(e^{5\varphi i})^2}{(e^{-3\varphi i})^3}=e^{19\varphi i}$,

故三角表示式为 $z=\cos 19\varphi+i\sin 19\varphi$,

指数表示式为 $z=e^{19\varphi i}$.

例2 把复数 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0\le\alpha\le\pi$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角的主值.

解 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$ (三角式)

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.$$ (指数式) $\quad \arg z=\dfrac{\pi-\alpha}{2}.$

例13求复数 $z=\dfrac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}$ 的实部和虚部,

其中 $\eta=e^{i\varphi}$.

解 $$z=\frac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}=\frac{\cos\varphi\cos\theta-1+i\sin\varphi\cos\theta}{\cos\varphi\cos\theta+1+i\sin\varphi\cos\theta}$$

$$=\frac{(\cos\varphi\cos\theta)^2-1+(\sin\varphi\cos\theta)^2+2i\sin\varphi\cos\theta}{(\cos\varphi\cos\theta+1)^2+(\sin\varphi\cos\theta)^2}$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{-(\sin\theta)^2}{2\cos\varphi\cos\theta+1+(\cos\theta)^2}}}_{=\mathrm{Re}\,z}+\underbrace{\boxed{\frac{2\sin\varphi\cos\theta}{2\cos\varphi\cos\theta+1+(\cos\theta)^2}}}_{=\mathrm{Im}\,z}i.$$

例4　设 z_1, z_2 为两个任意复数, 证明:

(1) $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$;　　　(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

证　(1) $|z_1\bar{z}_2| = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)\overline{(z_1\bar{z}_2)}} = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)}$

$$= \sqrt{(z_1\bar{z}_1)(\bar{z}_2 z_2)} = |z_1||z_2|.$$

(2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

因为 $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2|\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

两边同时开方得 $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

3、复球面与无穷大:

在点坐标是(x, y, u)的三维空间中，把 $x0y$面看作是 z 平面。考虑球面S:

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1, \quad z = x + iy$$

取定球面上一点$N(0, 0, 1)$称为球极。

我们可以建立一个复平面C到$S-\{N\}$之间的一个1-1对应（球极射影）：

$$z = x + iy = \frac{x' + iy'}{1 - u'}$$

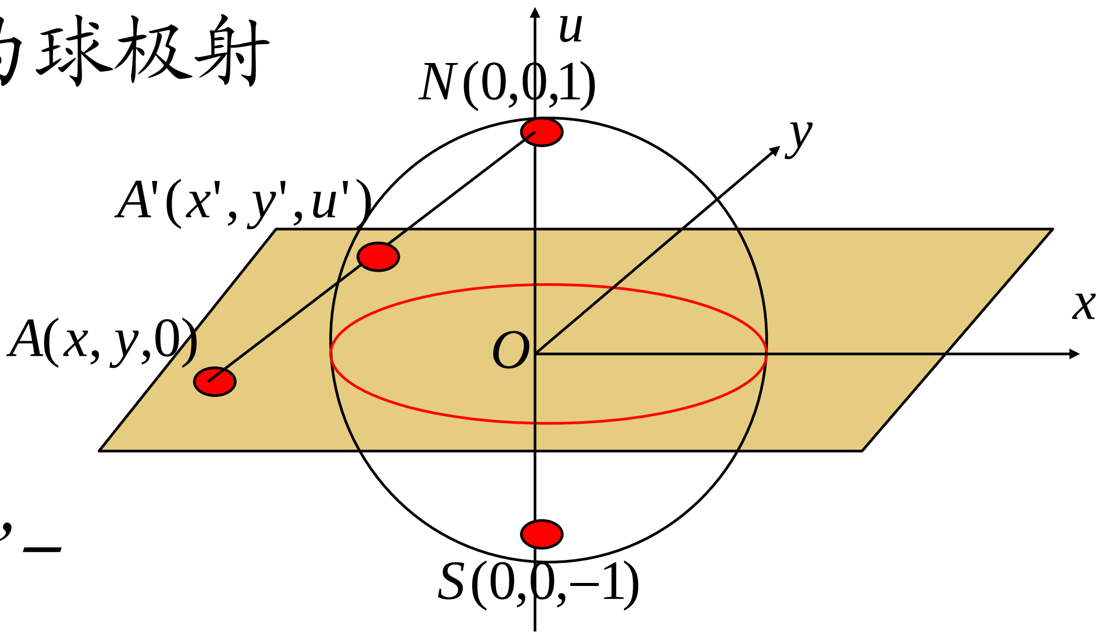
球极射影:

$$x' = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \qquad y' = \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \qquad u' = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

我们称上面的映射为球极射影:

1、 (x, y, 0) , (x’, y’, u’) , (0, 0, 1) 三点共线

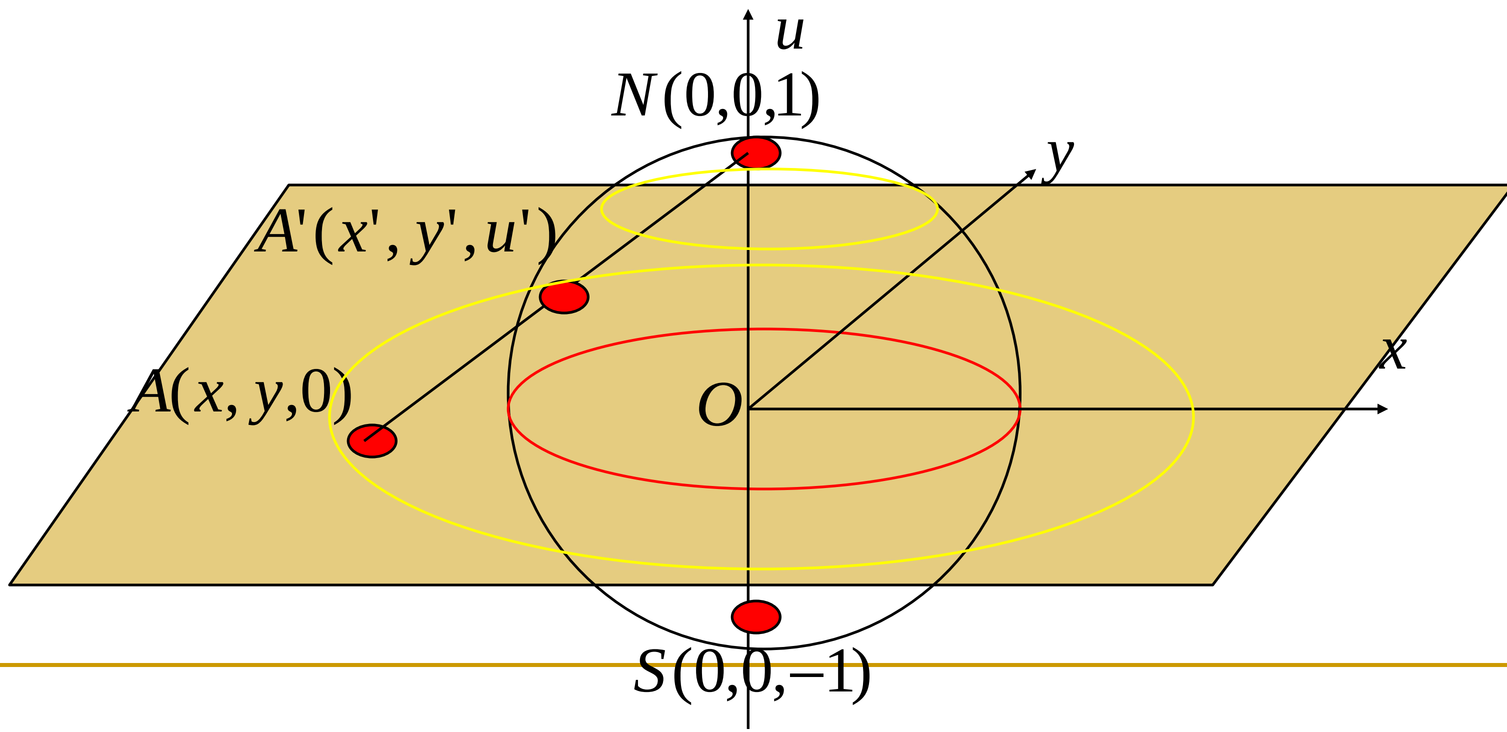
2、 $x : y : -1 = x' : y' : u' - 1$;



无穷远点:

对应于球极射影为N，我们引入一个新的非正常复数 ∞ 称为无穷远点，

称 $C\cup\{\infty\}$ 为扩充复平面，记为C_∞ 。



关于无穷远点，我们规定其实部、虚部、辐角无意义，模等于:

$$|\infty| = +\infty$$

它和有限复数的基本运算为:

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{a}{0} = \infty (a \neq 0); \quad \frac{a}{\infty} = 0 (a \neq \infty)$$

这些运算无意义: $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \infty / \infty, 0 / 0.$

第二节　复平面上的拓扑

1 初步概念

2 区域与约当曲线

Department of Mathematics

1 基本概念:

设$a \in C, r \in (0, +\infty)$,

a的r邻域定义:

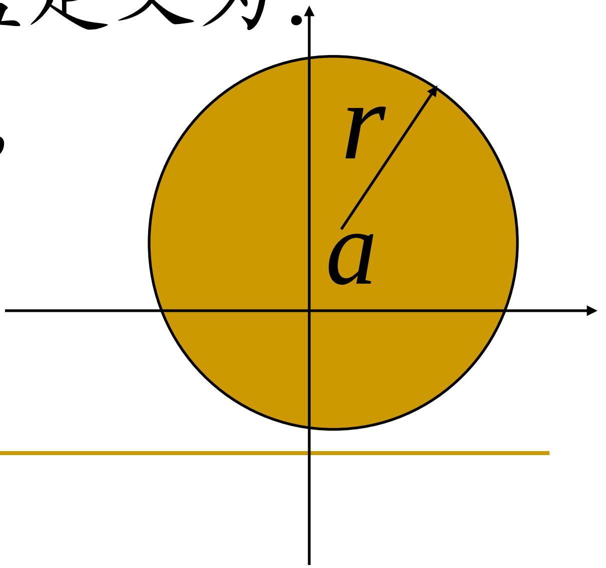
以a为圆心, r为半径的圆盘$U(a, r)$定义为:

$$\{z \mid |z-a| < r, z \in C\},$$

以a为圆心, r为半径的闭圆盘定义为:

$$\{z \mid |z-a| \le r, z \in C\},$$

记为: $\overline{U}(a, r)$.



极限点、内点、边界点:

设$E \subset C, a \in C$,若

$$\forall r > 0, U(a,r) \cap E$$

中有无穷个点,则称a为E的极限点;

若对存在$r > 0$, $U(a,r) \subset E$,则称a为E的内点;

$$\forall r > 0, U(a,r) \cap E$$

中既有属于E的点,又有不属于E的点,则称a为的E边界点;集E的全部边界点所组成的集合称为E的边界,记为 ∂E.

闭包、孤立点、开集、闭集:

$E\cup\partial E$称为D 的闭包，记为 $\overline{E}$.

若对存在一个$r>0$，使得

$$U(a,r)\cap E=\{a\}$$

则称a为的E孤立点（是边界点但不是聚点）;

开集：所有点为内点的集合;

闭集：或者没有聚点，或者所有聚点都属于它;

1、任何集合的闭包一定是闭集;

2、如果存在$r>0$ ，使得，$E\subset U(0,r)$

则称E是有界集，否则称E是无界集;

3、复平面上的有界闭集称为紧集。

例1、圆盘$U(a, r)$是有界开集；闭圆盘是有界闭集；

例2、集合$\{z/|z-a|=r\}$是以为a心，r为半径的圆周，它是圆盘$U(a, r)$和闭圆盘的边界。

例3、复平面、实轴、虚轴是无界集，复平面是无界开集。

例4、集合$E=\{z/0<|z-a|<r\}$是去掉圆心的圆盘。圆心a边界点，它是E边界的孤立点，是集合E的聚点。

2　区域、曲线：

复平面C上的集合D，如果满足：

（1）D是开集；

（2）D中任意两点可以用有限条相衔接的线段所构成的折线连起来，而使这条折线上的所有点完全属于D。

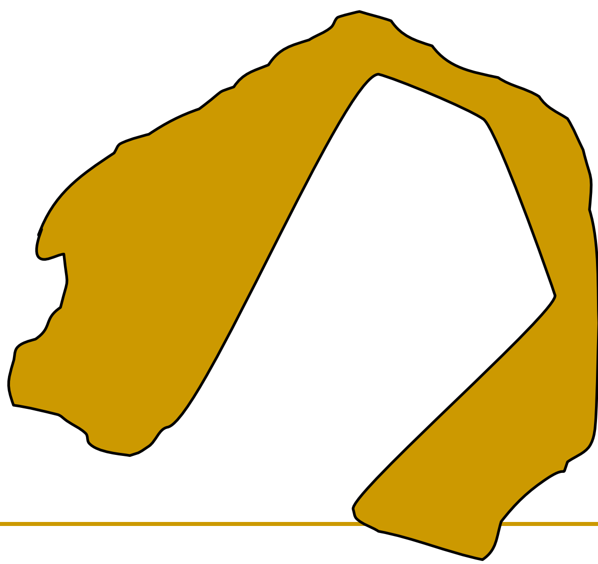
则称D是一个区域。

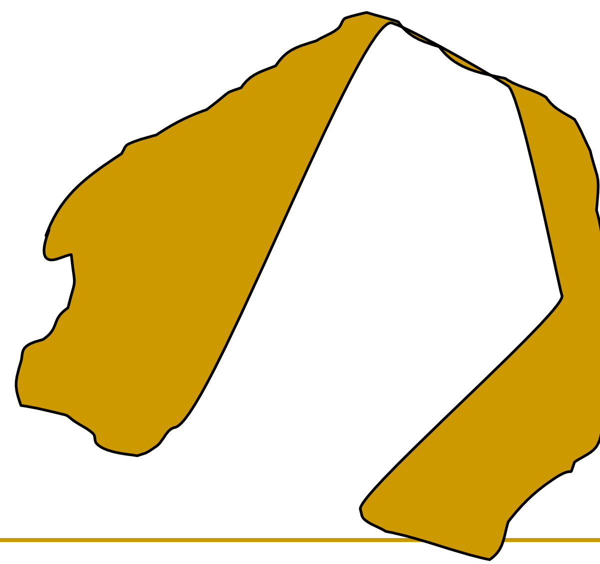
结合前面的定义，可以定义有有界区域、无界区域。

连通性:

性质（2）我们称为连通性，即区域是连通的开集。

区域D内及其边界上全部点所组成的集称为闭区域。





曲线:

设已给 $z = z(t), (a \le t \le b)$

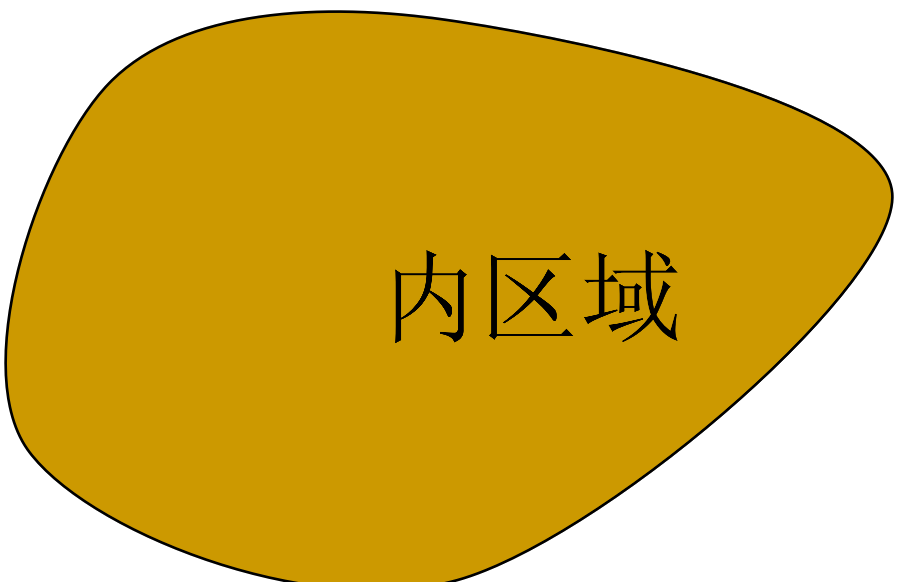
如果$\mathrm{Re}\,z(t)$和$\mathrm{Im}\,z(t)$都是闭区间$[a, b]$上连续函数，则称这些点组成集合为一条连续曲线。如果对上任意不同两点t及s，但不同时是端点，我们有:

$$z(t) \ne z(s)$$

即是一条除端点外不自交的连续曲线，那么上述集合称为一条简单连续曲线，或若尔当曲线。若还有$z(a)=z(b)$，则称为一条<u>简单连续闭曲线</u>，或<u>若尔当闭曲线</u>。

约当（Jordan）定理:

约当定理：任意一条约当闭曲线把整个复平面分成两个没有公共点的区域：一个有界的称为内区域，一个无界的称为外区域。

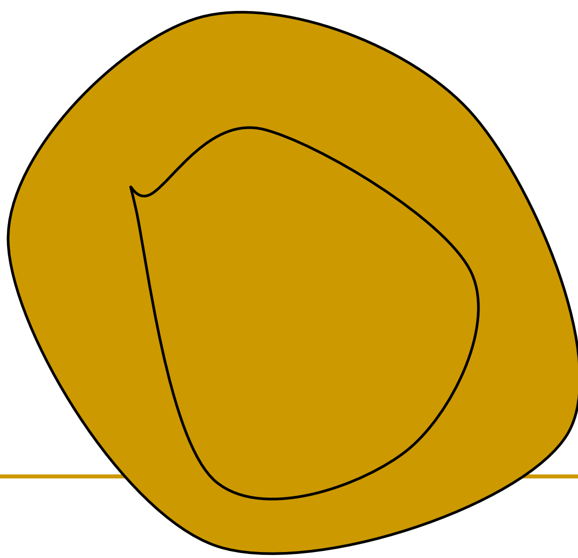


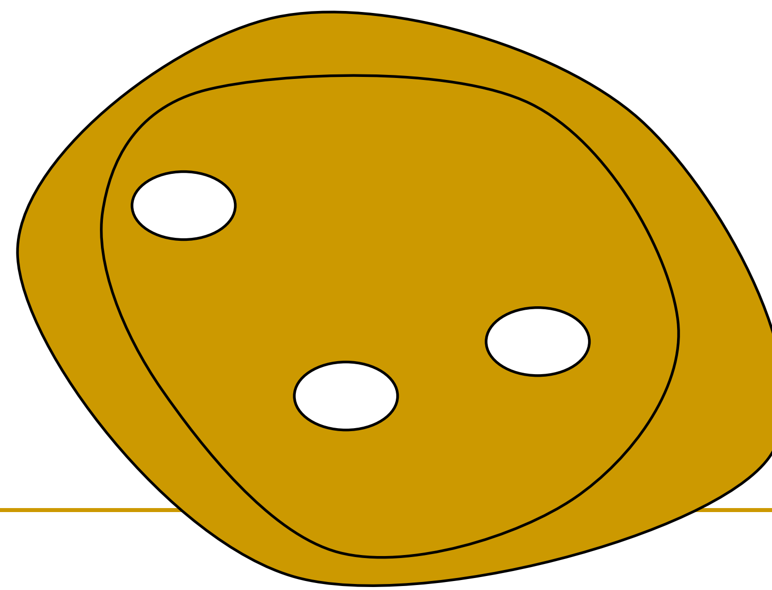
光滑曲线:

光滑曲线：如果$\mathrm{Re}z(t)$和$\mathrm{Im}z(t)$都在闭区间$[a,b]$上连续，且有连续的导函数，在$[a,b]$上，其导函数恒不为零，则称此曲线为一条光滑曲线；类似地，可以定义分段光滑曲线。

区域的连通性:

设D是一个区域，在复平面C上，如果D内任何简单闭曲线所围成的内区域中每一点都属于D，则称D是单连通区域;
否则称D是多连通区域。





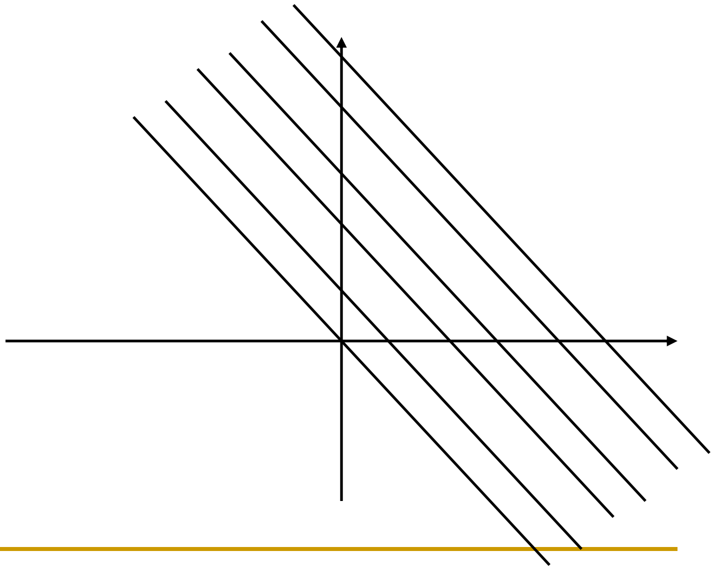
例1: 集合

$$\{z \mid (1-i)z+(1+i)\bar{z}>0\}$$

为半平面，它是一个单连通无界区域，其边界为直线:

$$(1-i)z+(1+i)\bar{z}=0$$

$$x+y=0$$

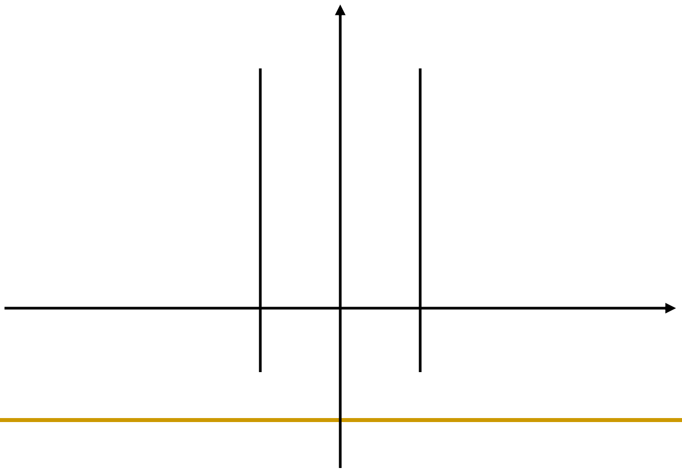


例2、集合

$$\{z \mid 2 < \operatorname{Re} z < 3\}$$

为一个垂直带形，它是一个单连通无界区域，其边界为两条直线：

$$\operatorname{Re} z = 2 \qquad \operatorname{Re} z = 3$$

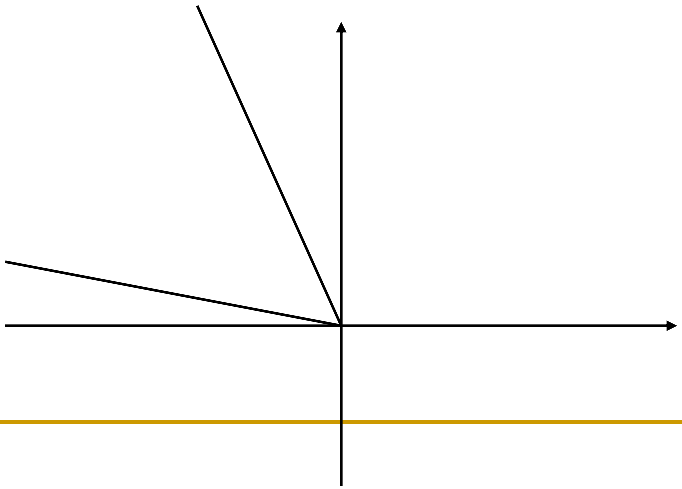


例3、集合

$$\{z \mid 2 < \arg(z-i) < 3\}$$

为一角形，它是一个单连通无界区域，其边界为半射线:

$$\arg(z-i) = 2 \qquad\qquad \arg(z-i) = 3$$



例4、集合:

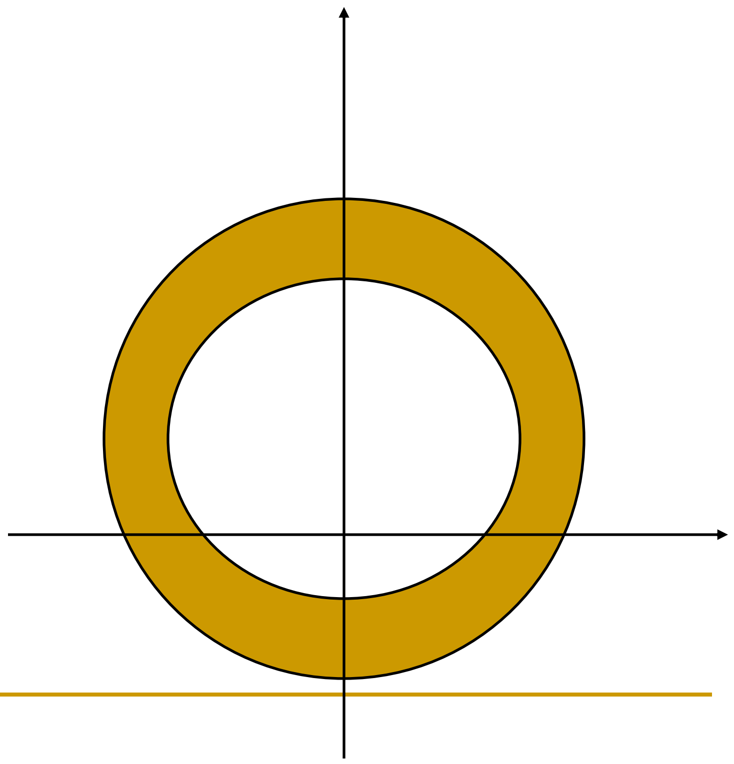
$$\{z \mid 2 < |z-i| < 3\}$$

为一个圆环，它是一个多连通有界区域

其边界为圆:

$$|z-i| = 3$$

$$|z-i| = 2$$



例5 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2$; (2) $|z-2i|=|z+2|$;

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$, $|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线.　　设 $z=x+iy$,

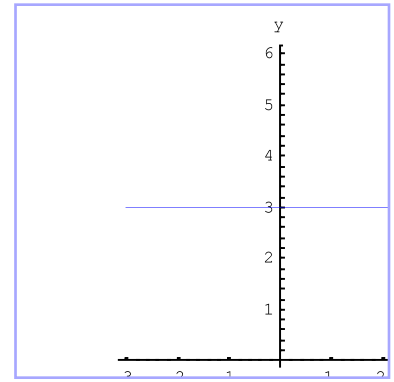
$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得　$y=-x$.

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$　　设 $z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$,　$\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为 $y=-3$.

例2 满足下列条件的点集是什么, 如果是区域, 指出是单连通域还是多连通域?

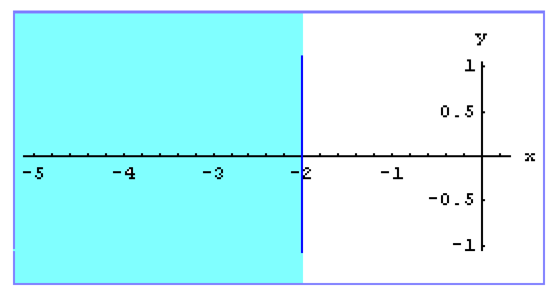


解 (1) $\operatorname{Im} z = 3$,

是一条平行于实轴的直线,

不是区域.

(2) $\operatorname{Re} z > -2$,



以 $\operatorname{Re} z = -2$ 为左界的半平面

(不包括直线 $\operatorname{Re} z = -2$),

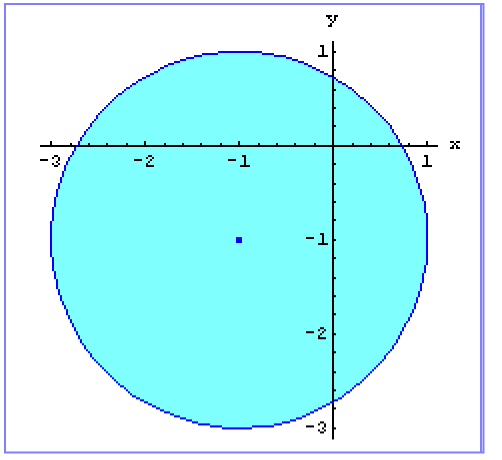
单连通域.

(3) $0<|z+1+i|<2$,

以$-(1+i)$为圆心, 2为半径

的去心圆盘,

是多连通域.

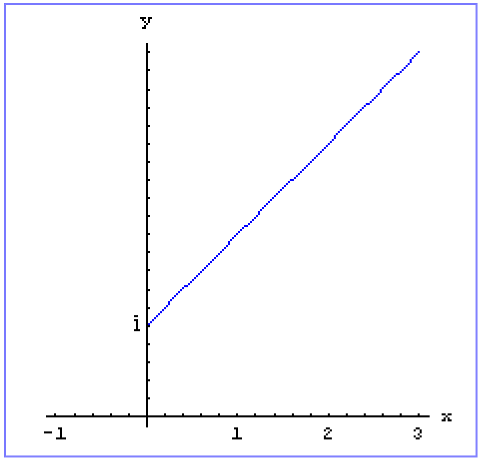


(4) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$,

以i为端点, 斜率为1的半射线

(不包括端点i),

不是区域.



(5) $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$,

当 $z=x+iy$ 时,

$$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2},$$

由 $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$ 知

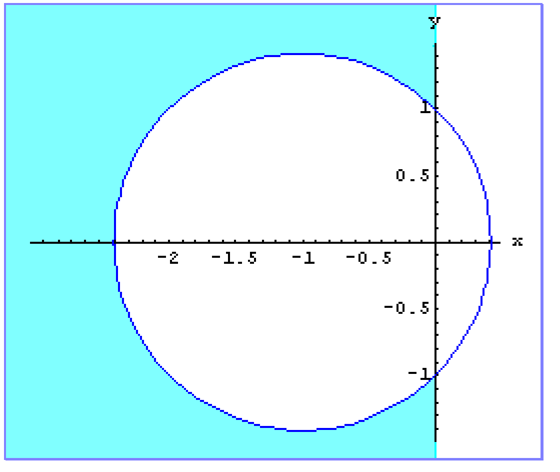
$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0,\qquad \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0,$$

因为 $x^2+(y+1)^2>0,$

于是 $\begin{cases} -2x>0, \\ x^2+y^2-1>0, \\ -2x<x^2+y^2-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2>1, \\ (x+1)^2+y^2>2. \end{cases}$

表示在圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的外部且属于左半平面的点集,

单连通域.



例 6. 设 $x_n + iy_n = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ **（** x_n**,** y_n **为实数,** n **为正整数），试证:**

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = 4^{n-1}.\sqrt{3}\ .$$

证明: $x_n + iy_n = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n = 2^n \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n = 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

因此 $x_n = 2^n \cos\frac{n\pi}{3}, y_n = -2^n \sin\frac{n\pi}{3}$, 所以

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n$$

$$= 2^n 2^{n-1}\left[-\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right]$$

$$= 2^{2n-1}\left(\sin[\frac{n\pi}{3} - \frac{(n-1)\pi}{3}\right) = 2^{2n-1}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cdot 4^{n-1}.$$

例 8. 求复数 $w=\dfrac{1+z}{1-z}\left(z\neq 1\right)$ 的实部，虚部，模.

解: 设 $z=x+iy$, 则

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{\left(1+x\right)+iy}{\left(1-x\right)-iy}=\frac{\left(1-x^2-y^2\right)+2yi}{\left(1-x^2\right)+y^2}$$

故 $\operatorname{Re} w=\dfrac{1-x^2-y^2}{\left(1-x^2\right)+y^2}$ $\qquad I_m w=\dfrac{2y}{\left(1-x^2\right)+y^2}$

$$\left|w\right|=\frac{1}{\left(1-x^2\right)+y^2}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+1-2\left(x^2-y^2\right)}.$$

试证：三角形的内角的和等于 π.

证：设三角形的三个顶点分别为 z_1, z_2, z_3；对应的三个顶角分别为 α, β, γ，于是有：

$$\alpha = \arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1},$$

$$\beta = \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2},$$

$$\gamma = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad .$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = -1$$

由公式有：

$$\arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} + \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \pi + 2k\pi$$

由三个是内角容易得到：

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$