暨南大学复变函数教学课件

暨南大学数学系

高凌云

二0一一年九月至二0一二年一月

Department of Mathematics
Jinan Univ.   2011

第六章 保形映射

§1 单叶解析函数的映射性质

- 1. 曲线的切线
- 2. 导数的几何意义
- 3. 保形映射的概念

1. 曲线的切线

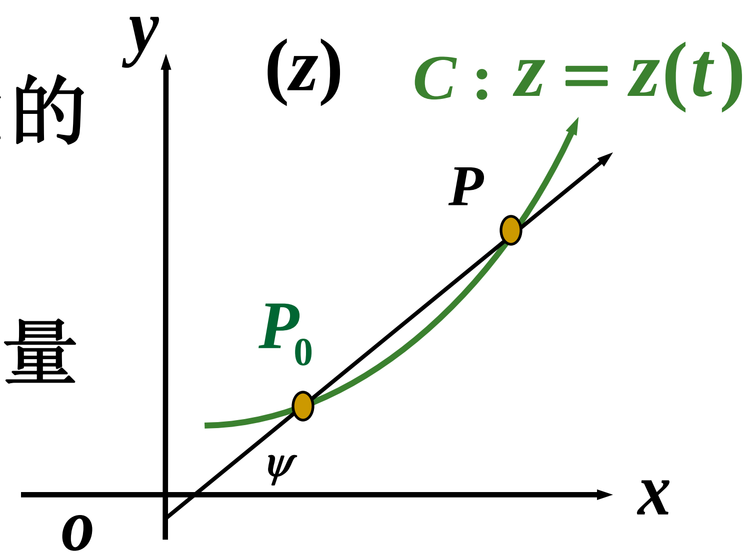
设连续曲线 $C: z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

它的正向取t增大时点z移动的方向.

若$z'(t_0) \neq 0, t_0 \in (\alpha, \beta)$,取$P_0, P \in C, P_0, P$对应的参数分别为$t_0, t,$

割线$p_0 p$对应于参数t增大的方向。

则割线的方向向量$\overrightarrow{p_0 p}$与向量$\dfrac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$方向相同.



割线方向$\overrightarrow{p_0 p}$的极限位置：

$$z'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$

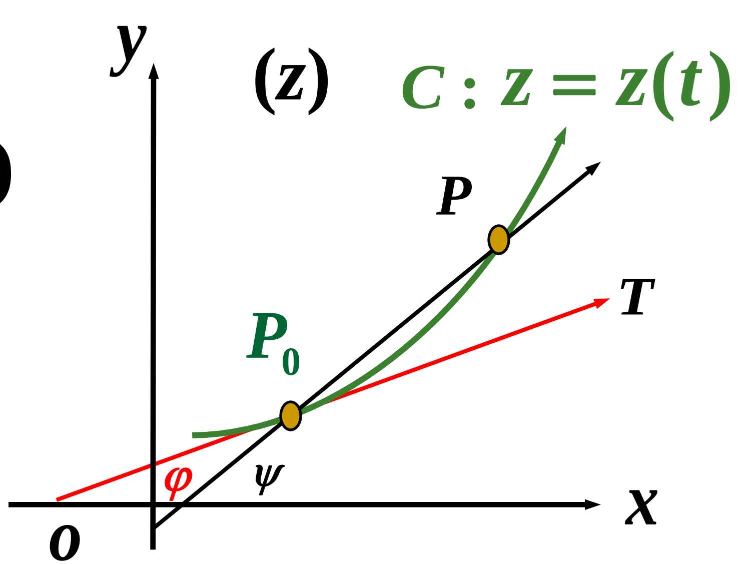
—曲线C在p_0处的切向量且方向与C正向一致.

$\therefore$ 若$z'(t_0) \neq 0, t_0 \in (\alpha, \beta)$,

则曲线C在z_0有切线, $z'(t_0)$

就是切向量, 它的倾角

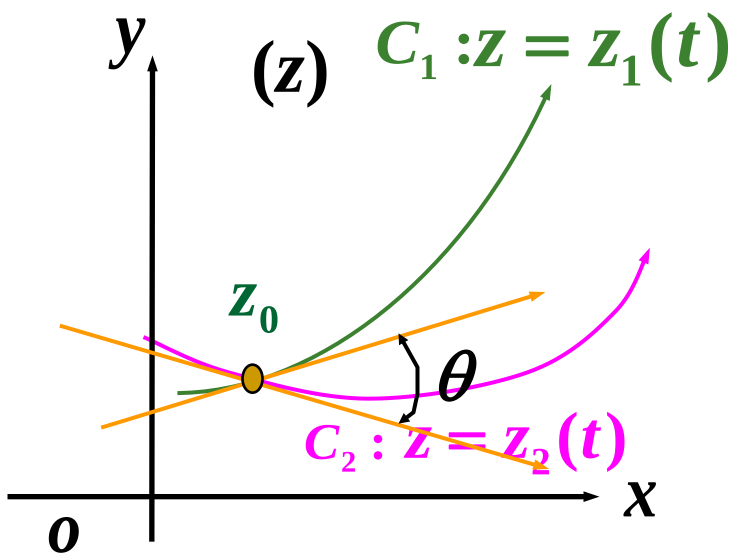
$\varphi = \arg z'(t_0)$.



定义　切线随切点的移动而连续转动的有向曲线称为有向光滑曲线.

(1) $\mathrm{Arg}\,z'(t_0)$——曲线C在点z_0处切线的正向与x轴正方向之间的夹角.

(2)若曲线C_1与曲线C_2相交于点z_0，在交点处两曲线正向之间的夹角就是它们的两条切线正向之间的夹角.



2. 解析函数导数的几何意义(辐角和模)

设$w = f(z)$在区域D内解析,$z_0 \in D$,且$f'(z_0) \neq 0$,

在D内过z_0引一条有向光滑曲线

$$C: z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

取$t_0 \in (\alpha, \beta)$ $\quad z_0 = z(t_0) \quad z'(t_0) \neq 0 \quad$ 则

z平面上$C: z = z(t) \xrightarrow{\boxed{w=f(z)}}$ w平面上$\Gamma: w = f[z(t)]$

Γ—过点$w_0 = f(z_0)$,正向取t增大方向的曲线

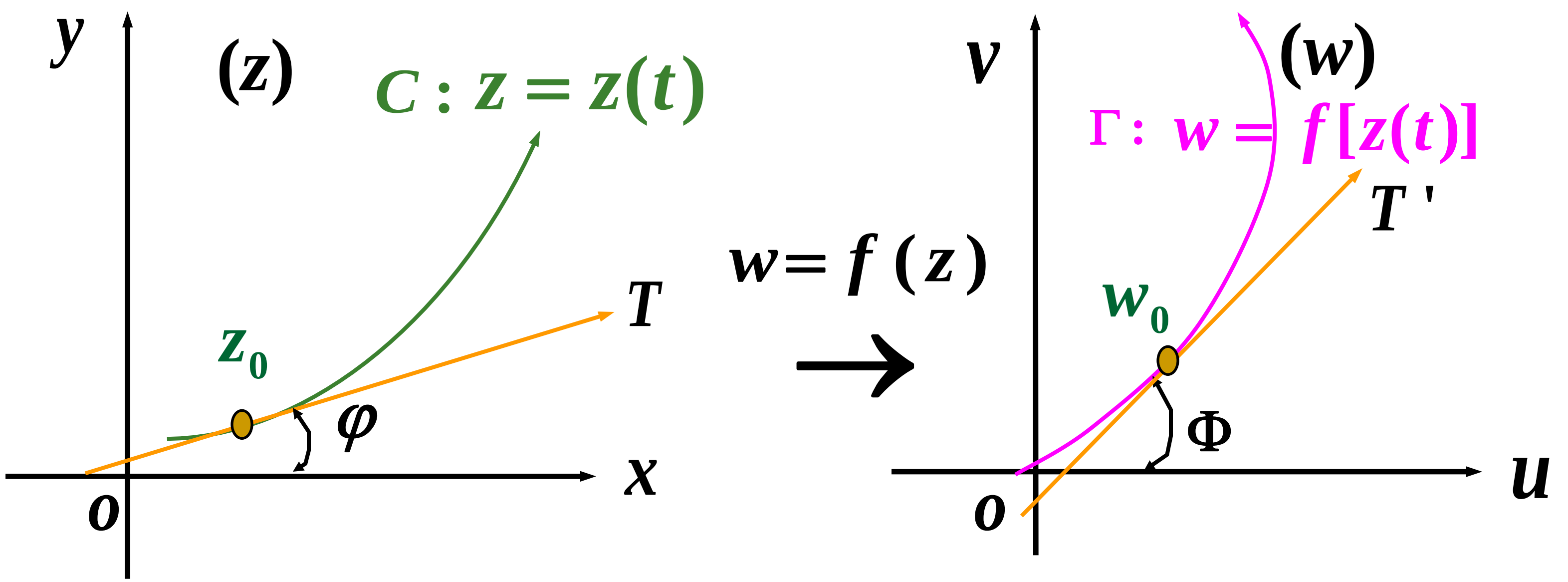
$$\because w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arg}\,w'(t_0) = \mathrm{Arg}\,f'(z_0) + \mathrm{Arg}\,z'(t_0)$$

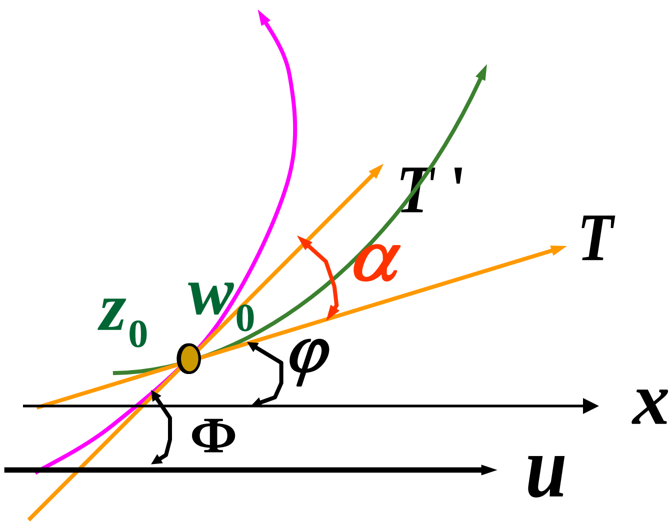
记 $\qquad \Phi \qquad \alpha \qquad \varphi$

即 $\quad \mathrm{Arg}\,f'(z_0) = \mathrm{Arg}\,w'(t_0) - \mathrm{Arg}\,z'(t_0)$

即 $\quad \alpha = \Phi - \varphi \qquad (1)$



若视x轴与u轴和y轴与v轴的正向相同，称曲线C的切线正向与映射后曲线Γ正向之间的夹角为(原曲线C经映射$w=f(z)$)在点z_0的转动角，记作α.



$$\alpha=\Phi-\varphi \quad \text{即} \operatorname{Arg}f'(z_0)=\operatorname{Arg}w'(t_0)-\operatorname{Arg}z'(t_0)$$

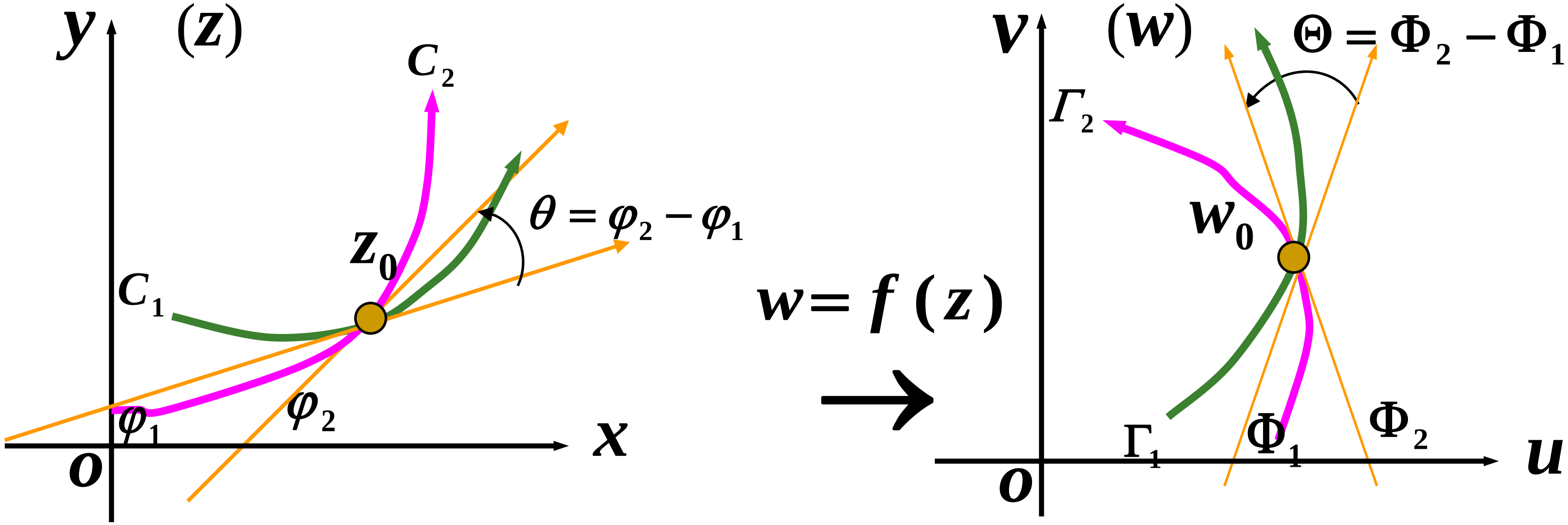
(1)导数幅角$\mathrm{Arg} f'(z)$的几何意义

①$\mathrm{Arg} f'(z_0)$($f'(z_0)\neq 0$)是曲线C经过$w=f(z)$映射后在点z_0的转动角.

由(1)式α仅与映射$w=f(z)$及点z_0有关,则

② 转动角α的大小及方向与曲线C的形状与方向无关,这种性质称为映射具有转动角的不变性.

设$C_i(i=1,2)$在点z_0的夹角为θ, $C_i(i=1,2)$在变换$w=f(z)$下映射为相交于点$w_0=f(z_0)$的曲线$\Gamma_i(i=1,2)$, Γ_1,Γ_2的夹角为Θ.



由式(1)有， $\alpha=\Phi_i-\varphi_i \quad (i=1,2)$

$\Rightarrow \Phi_2-\Phi_1=\varphi_2-\varphi_1$

$\boxed{\therefore \Theta=\theta}$ ——保角性

由上述讨论我们有

过z_0的$C_1,C_2 \xrightarrow{\boxed{w=f(z)}}$过$w_0$的$\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow (\widehat{C_1,C_2}) = (\widehat{\Gamma_1,\Gamma_2})$,

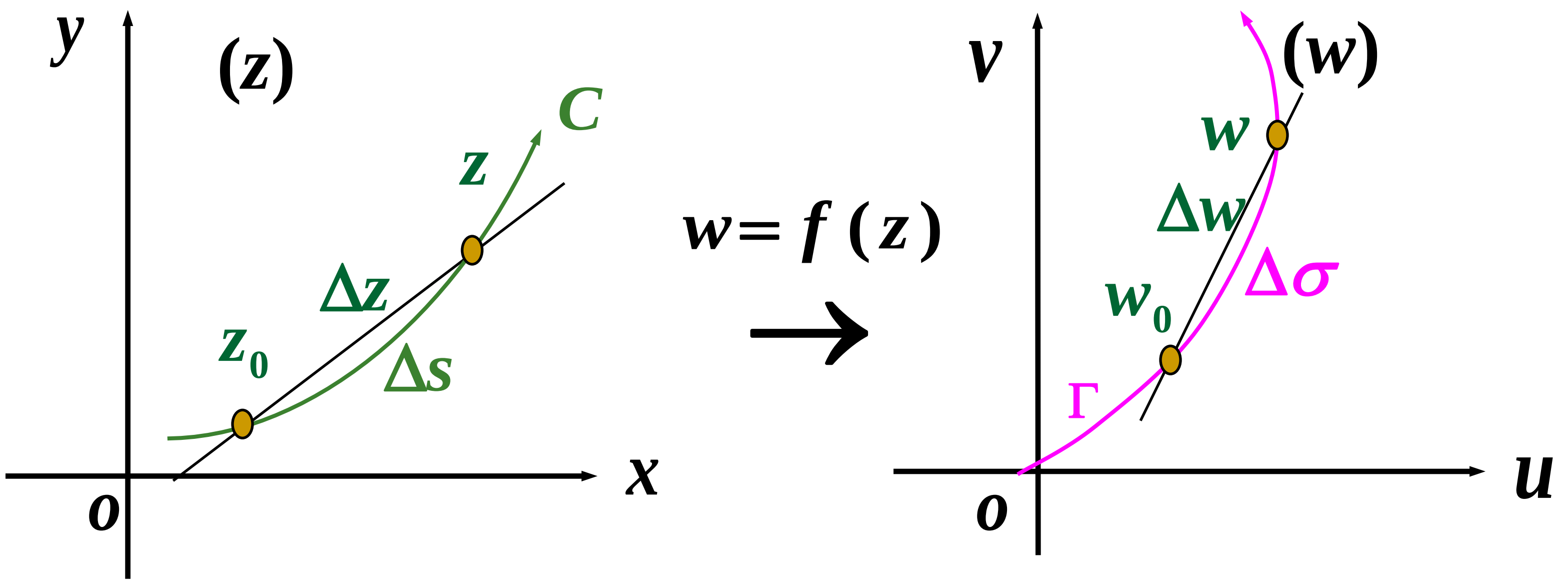
这种映射具有保持两曲线间夹角的大小与方向不变的性质--保角性

(2)模$|f'(z)|$的几何意义

设$\Delta z = z - z_0 = re^{i\theta}$, $\Delta w = w - w_0 = \rho e^{i\varphi}$且

用Δs表示C上的点z_0与z之间的一段弧长;

$\Delta\sigma$表示Γ上的对应点w_0与w之间的弧长.



$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|}{\Delta s}=1 \qquad \lim_{\Delta \sigma\to 0}\frac{|\Delta w|}{\Delta \sigma}=1$$

$$\therefore |f'(z_0)|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{\Delta \sigma}\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\frac{\Delta s}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \qquad (3)$$

$|f'(z_0)|$——称之为曲线C在z_0的伸缩率.

易见，$|f'(z_0)|$与映射$w=f(z)$及z_0有关，而与曲线的形状方向无关，沿任何曲线作映射f时，在同一点z_0处$A=|f'(z_0)|$均不变$--$伸缩率不变性.

3. 保形映射的概念

定义 设$w=f(z)$在z_0的邻域内有定义，且在z_0具有保角性和伸缩率不变性，则称映射$w=f(z)$在z_0为共形的，或称$w=f(z)$在z_0是共形映射.

若$w=f(z)$在D内每一点都是共形的，则称$w=f(z)$在区域D内是共形映射.

由定义及以上分析有:

定理 若$w=f(z)$在z_0点解析且$f'(z_0)\neq 0$,

$\Rightarrow w=f(z)$是保形映射,

且$\alpha = Argf'(z_0)$为转动角,$|f'(z_0)|$为伸缩率。

若上述共形映射定义中,仅保持角度绝对值不变,而旋转方向相反,此时称第二类共形映射。从而,定义中的共形映射称为第一类共形映射。

设$w = f(z) \quad z \in D$

$z_0 \in D \quad w_0 = f(z_0) \quad f'(z_0) \neq 0$

又$\because \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \dfrac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \to z_0} = |f'(z_0)|$

$\therefore \Delta w \approx |f'(z_0)||\Delta z|$（忽略高阶无穷小）

那么圆:$|z - z_0| = \delta \xrightarrow{w = f(z)} |w - w_0| = |f'(z_0)|\delta$

（忽略高阶无穷小）

这就是为什么称保形映射的原因.

§2 分式线性映射

- 1. 分式线性映射的定义
- 2. 分式线性映射的性质

1. 分式线性映射的定义

定义 映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)-(1)$

称为分式线性映射,其中a,b,c,d是复常数.

(1) $\because w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\ \therefore ad-bc\neq 0$是必要的。

否则$w'=0\Rightarrow w\equiv c$(复常数).

(2)补充定义使分式线性函数在整个扩充平面上有定义:

当$c\neq 0$时, $w=\begin{cases}\infty & z=-d/c\\ a/c & z=\infty\end{cases}$

当$c=0$时, 在$z=\infty$时, 定义$w=\infty$.

$$(3)w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow z = \frac{-dw+b}{cw-a} \quad (-d)(-a)-bc \neq 0$$

则,逆映射仍为分式线性的

故又称$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$为双线性映射.

分式线性映射(1)总可以分解成下述三种特殊映射的复合:

$$(i)\,w = z+b \quad (ii)\,w = az(a \neq 0) \quad (iii)\,w = \frac{1}{z}$$

称为: 平移 整线性 反演

事实上，

(A, B复常数)

当$c=0$时，$w=\dfrac{az+b}{cz+d}\Rightarrow w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}=Az+B$

当$c\neq0$时，$w=\dfrac{a(z+\frac{d}{c})+b-\frac{ad}{c}}{c(z+\frac{d}{c})}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cz+d}$

$$=A\frac{1}{cz+d}+B\quad(A=\frac{bc-ad}{c}\quad B=\frac{a}{c})$$

$\therefore w=\dfrac{az+b}{cz+d}$由$\xi_1=cz+d,\xi_2=\dfrac{1}{\xi_1}$和$w=A\xi_2+B$

复合而成.

$(i)w=z+b$

设$w=u+iv \quad z=x+iy \quad b=b_1+ib_2$

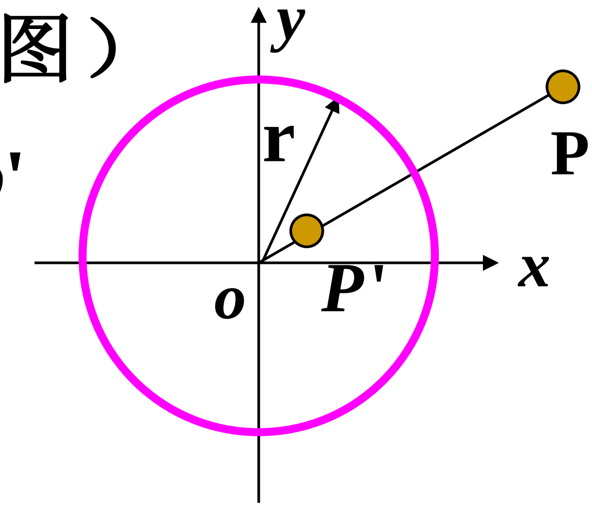
故 $\begin{cases} u=x+b_1 \\ v=y+b_2 \end{cases}$ $\therefore w=z+b$是一个平移映射.

$(ii)w=az$

设$z=re^{i\theta} \quad a=\lambda e^{i\alpha}$,则$w=r\lambda e^{i(\theta+\alpha)}$

$\therefore$把z先转一个角度α再将$|z|$伸长(或缩短)$|a|=\lambda$倍后就得w, $\therefore w=az$是旋转和伸缩合成的映射.

名词介绍:关于圆的对称点(见图)

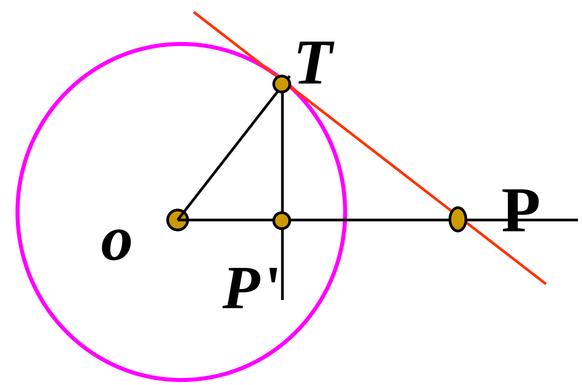


定义 若在半直线上有两点p, p'满足$\overline{op}\cdot\overline{op'}=r^2$,则称$p$与$p'$关于圆周$|z|=r$对称.

规定无穷远点的对称点为圆心o

如何由p找到关于圆周$|z|=r$的对称点p'呢?

设p在圆外,从p作圆周的切线pT,连接op,由T作op的垂线Tp',与op交于p',那么p与p'即互为对称点.

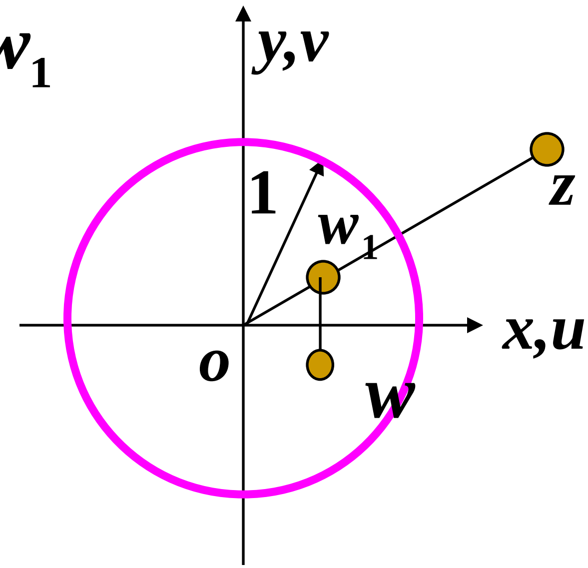


$(iii)\, w=\dfrac{1}{z}$　令 $w_1=\dfrac{1}{\bar{z}},\quad w=\overline{w_1}$

设 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\bar{z}=re^{-i\theta}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$w_1=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{r}e^{i\theta}\Rightarrow w=\overline{w_1}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$



$w=\dfrac{1}{z}$的几何作图

$\because |z||w_1|=r\cdot\dfrac{1}{r}=1$, z与w_1在同一射线上;

$\therefore z, w_1$关于$|z|=1$对称.

1)作出点z关于圆周$|z|=1$的对称点w_1.

2)作出点w_1关于实轴对称的点即得w(见图).

2. 分式线性映射的性质

先讨论以上三种特殊映射的性质,从而得出一般分式线性映射的性质.

(1)保角性

对于(iii) $w=\dfrac{1}{z}$ 的情况

$\because |z|<1 \Rightarrow |w|>1 \quad |z|>1 \Rightarrow |w|<1 \quad |z|=1 \Rightarrow |w|=1;$

若 $\arg z=\theta, \Rightarrow \arg w=-\theta$

因此映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 通常称为反演变换

$z=0 \xrightarrow{w=f(z)} w=\infty; z=\infty \xrightarrow{w=f(z)} w=0$(见第一章§2)

又$\because w'=\dfrac{-1}{z^2}\quad (z\neq 0)$

$\therefore$适当规定∞处夹角的定义后,映射$w=\dfrac{1}{z}$

在扩充复平面上处处共形的,即为一共形映射.

（详见P195）

对$(i),(ii)$的复合映射$w=az+b(a\neq 0)$

$\because w'=(az+b)'=a\neq 0\quad \therefore$是共形映射.

由于分式线性映射是由三种特殊映射复合

而成的,有以下结论:

定理1 分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的,且具有保角性.

(2)保圆性

$\because w = az + b$是平移,旋转,伸缩的合成映射.

$\therefore z$平面上的圆周$C \xrightarrow{w=az+b} w$平面上的圆周Γ

z平面上的直线$l \xrightarrow{w=az+b} w$平面上的直线L

若把直线看作是半径无穷大的圆周,那么

$w = az + b$在扩充复平面上把圆周映射成圆周,即具有保圆性.

对于$(iii)\, w=\dfrac{1}{z}$,

$$z=0 \xrightarrow{w=1/z} \infty,\; z=\infty \xrightarrow{w=1/z} 0$$

令$z=x+iy \quad w=\dfrac{1}{z}=u+iv$,

将$z=x+iy$代入$w=\dfrac{1}{z}$得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

或 $\quad x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \quad y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$\therefore C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

$$\xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$a,d \neq 0$ 圆周$C \to$ 圆周Γ

$a \neq 0, d=0$ 圆周$C \to$ 直线Γ

$a=0, d \neq 0$ 直线$C \to$ 圆周Γ

$a=0, d=0$ 直线$C \to$ 直线Γ

把直线看成是半径为∞的圆,那么反演变换就具有保圆性.

定理2 分式线性映射将扩充z平面上圆周映射成扩充w平面上的圆周,即具有保圆性.

(3)保对称性

定理3 设点z_1, z_2是关于z平面上圆周C的一对对称点$\Rightarrow$在分式线性映射下,它们的象点w_1与w_2是关于象圆Γ的一对对称点.

在分式线性映射下,圆周或直线上没有点趋于无穷点,则它映射成半径为有限的圆周;若有一点映射成无穷远点,它映射成直线。

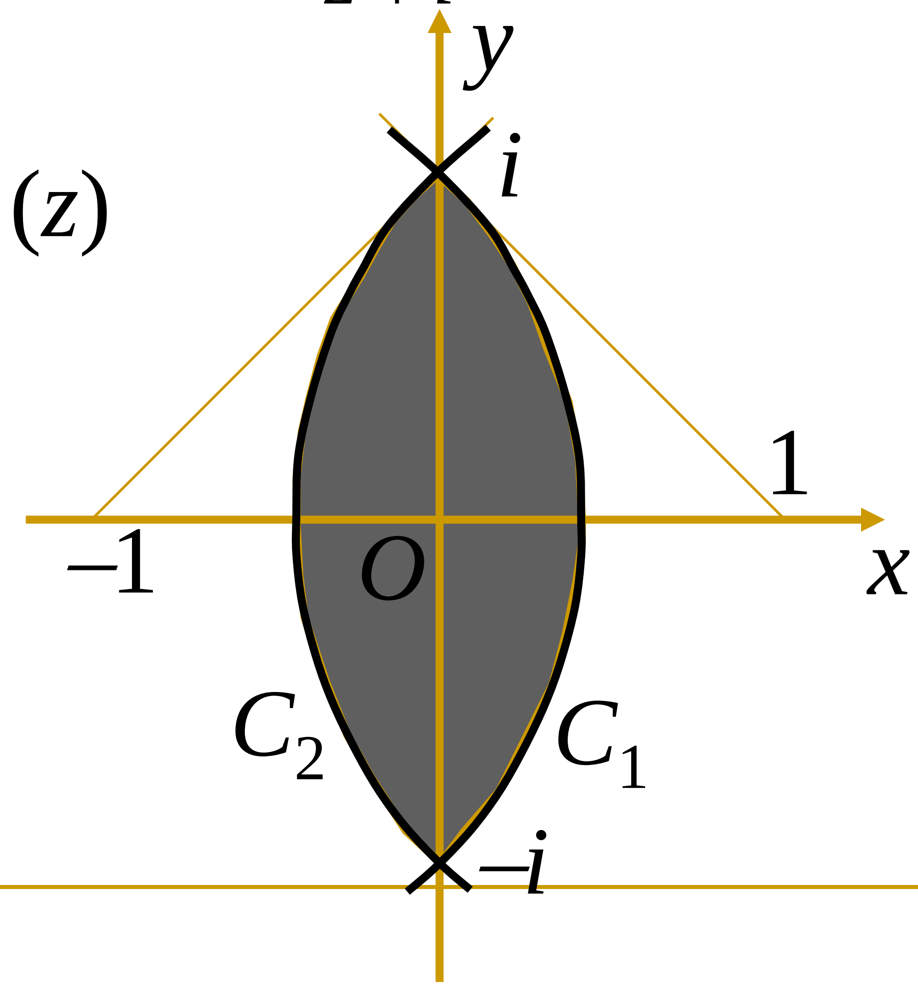
现讨论在z平面内两个圆包围的区域的映射情况. 根据前面的讨论可知:

(I) 当二圆周上没有点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域;

(II) 当二圆周上有一个点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域;

(III) 当二圆周交点中的一个映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成角形区域.

例 1 中心在 $z=1$ 与 $z=-1$，半径为$\sqrt{2}$的二圆弧所围区域，在映射$w=\dfrac{z-i}{z+i}$下映射成什么区域?



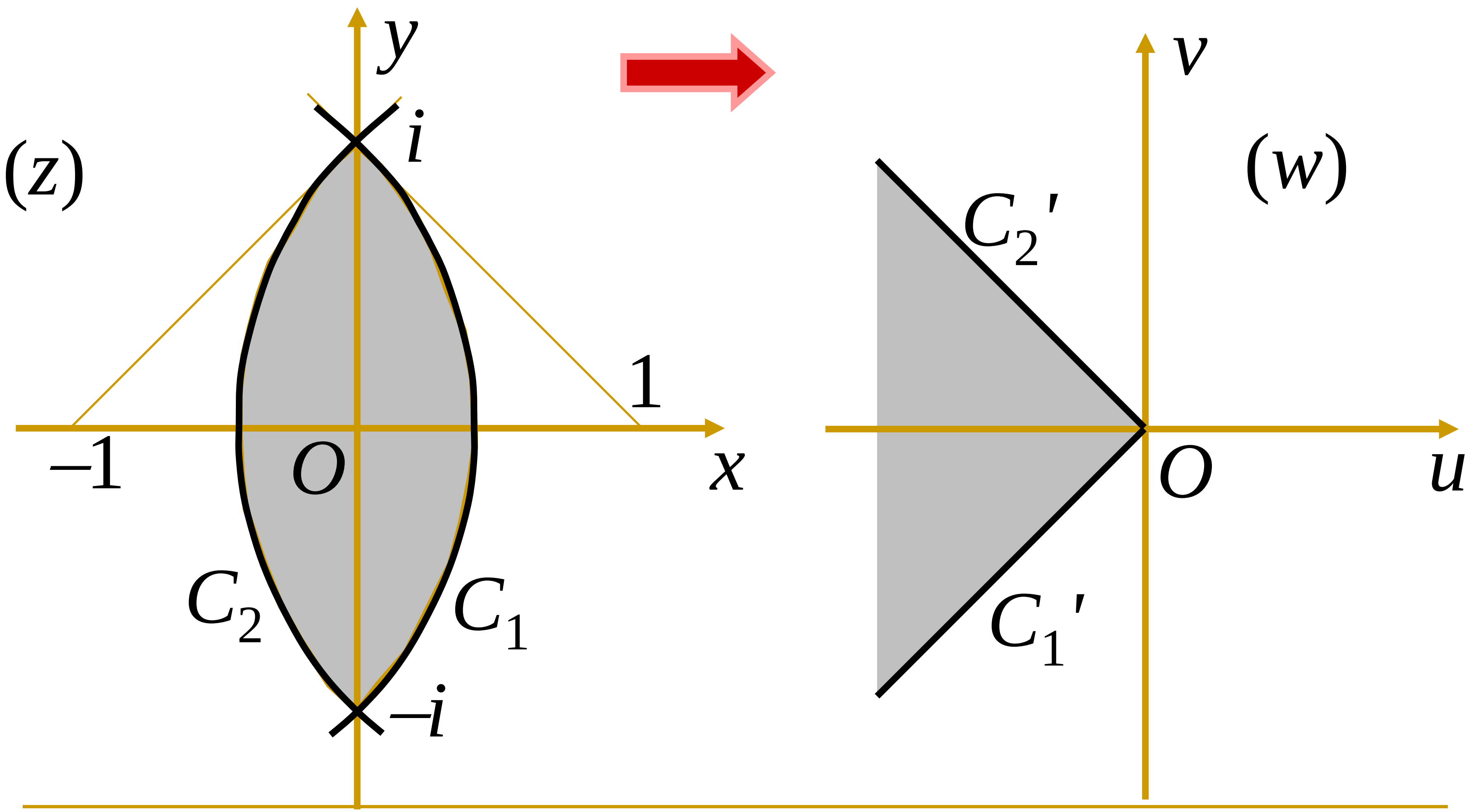
[解] 所设的两个圆弧的交点为$-i$与i，且相互正交．交点$-i$映射成无穷远点，i映射成原点. 因此所给的区域经映射后映射成以原点为顶点的角形区域，张角等于p/2.

取C_1与正实轴的交点$z=\sqrt{2}-1$,对应点是

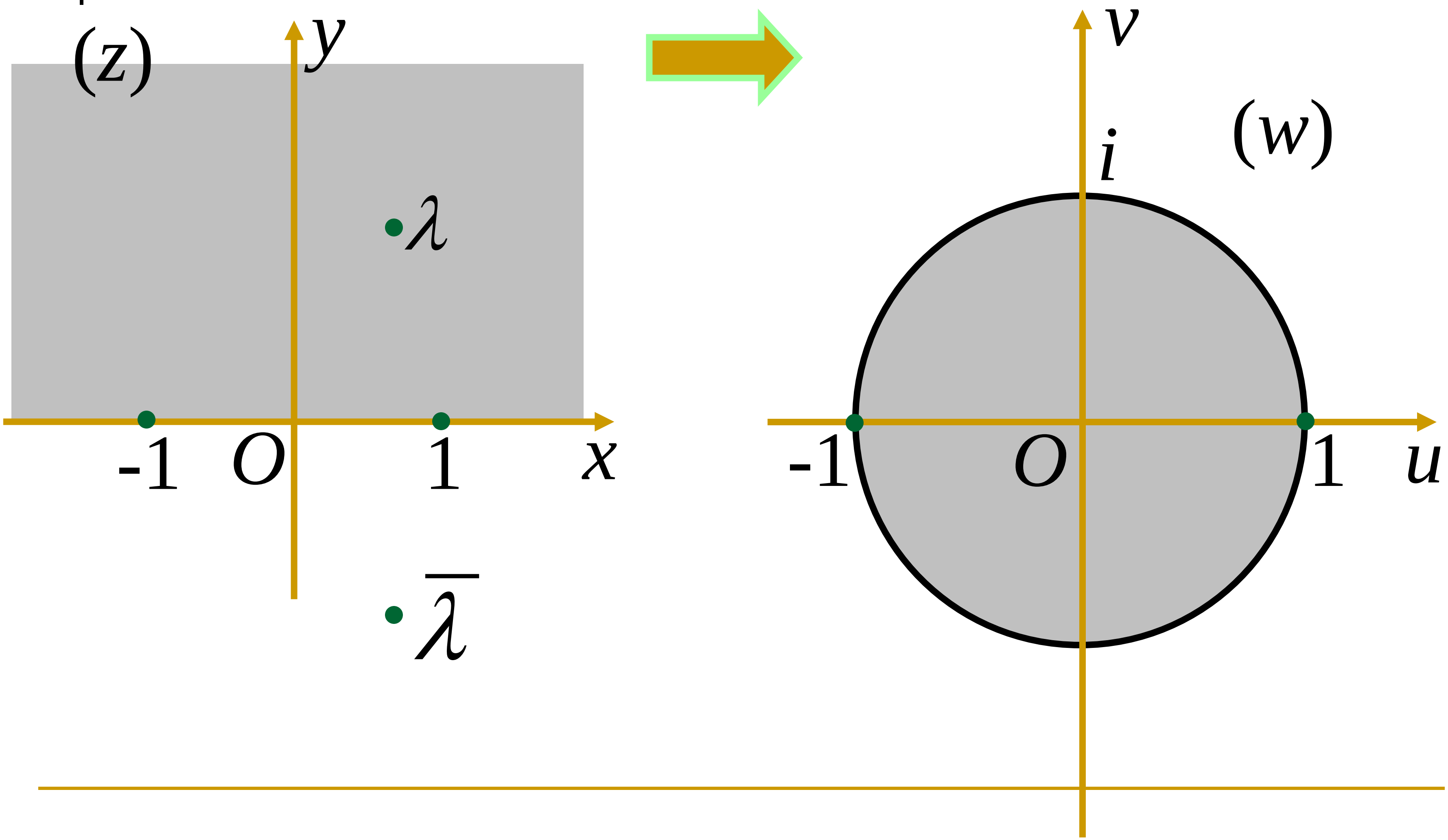
$$w=\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\frac{(1-\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}.$$

- 此点在第三象限的分角线C_1'上．由保角性知C_2映射为第二象限的分角线C_2.

映射的角形区如图所示



例2 求将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射.



[解法一] 在x轴上任意取定三点：$z_1=-1$，$z_2=0$，$z_3=1$使它们对应于$|w|=1$上三点：$w_1=1$，$w_2=i$，$w_3=-1$，则因$z_1\to z_2\to z_3$跟$w_1\to w_2\to w_3$的绕向相同，由(6. 3. 1)式得所求的分式线性映射为

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1}=\frac{z+1}{z-0}\cdot\frac{1-0}{1+1}.$$

化简后即得

$$w=\frac{z-i}{iz-1}=-i\frac{z-i}{z+i} \qquad (6.3.2)$$

注意：如果选取其他三对不同点，势必也能得出满足要求的，但不同于(6.3.3)的分式线性映射．此可见，把上半平面映射成单位圆的分式线性映射不是唯一的，而是有无穷多．

[解法二] 将上半平面看成半径为无穷大的圆域，实轴就是圆域的边界圆周．因为分式线性映射具有保圆性，因此它必能将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$．由于上半平面总有一点 $z=\lambda$ 要映成单位圆周 $|w|=1$ 的圆心 $w=0$，

实轴要映射成单位圆,而$z=\lambda$与$z=\bar{\lambda}$是关于实轴的一对对称点,$w=0$与$w=\infty$是与之对应的关于圆周$|w|=1$的一对对称点.所以根据分式线性映射具有保对称点不变的性质知,$z=\bar{\lambda}$必映成$w=\infty$.

从而所求的分式线性映射具有下列形式:

$$w=k\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right).$$

其中k为常数.

因为$|w|=|k|\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|$,而实轴上的点z对应着$|w|=1$上的点,这时$\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=1$,所以$|k|=1$,即$k=\mathrm{e}^{i\theta}$,这里$\theta$是任意实数.因此所求的分式线性映射的一般形式为

$$\boxed{w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right),(\mathrm{Im}(\lambda)>0)\quad(6.3.3)}$$

反之，形如上式的分式线性映射必将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成单位圆$|w|<1$．因为当z取实数时

$$|w|=\left|\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)\right|=|\mathrm{e}^{i\theta}|\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=1,$$

- 即把实轴映射成$|w|=1$. 又因为上半平面中的$z=i$映射成$w=0$, 所以(6.3.3)必将$\mathrm{Im}(z)>0$映射成$|w|<1$.

当（6.3.3）中取$\lambda=i$，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$时即得解法一的结果：

$$w=-i\frac{z-i}{z+i}.$$

当（6.3.3）中取$\lambda=i$，$\theta=0$时即得：

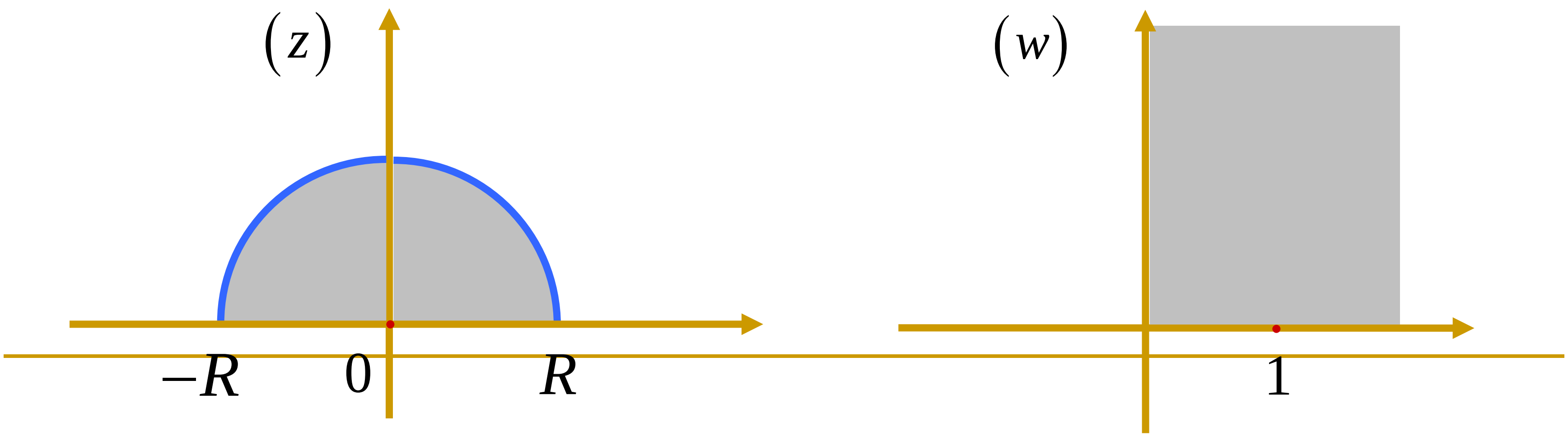
$$\boxed{w=\frac{z-i}{z+i}.}$$

例3 求映$\begin{cases} 0<|z|<R \\ 0<\arg z<\pi \end{cases}$为$\begin{cases} Imz>0 \\ \operatorname{Re} z>0 \end{cases}$的分式线性映射。

[解]令 $z=-R \mapsto w=0;\ z=R \mapsto w=\infty \Rightarrow w=k\dfrac{z+R}{z-R}.$

再取 $z=0 \mapsto w=1 \Rightarrow w=k(-1)=1 \quad \Rightarrow k=-1 \Rightarrow$

$$\boxed{w=-\frac{z+R}{z-R}.}$$



例4 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 且满足 $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$ 的分式线性映射.

解: 由条件 $w(2i)=0$ 知, 所求的映射要将上半平面中的点 $z=2i$ 映射成单位圆周的圆心 $w=0$. 所以由(6.3.3)得

$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right).$$

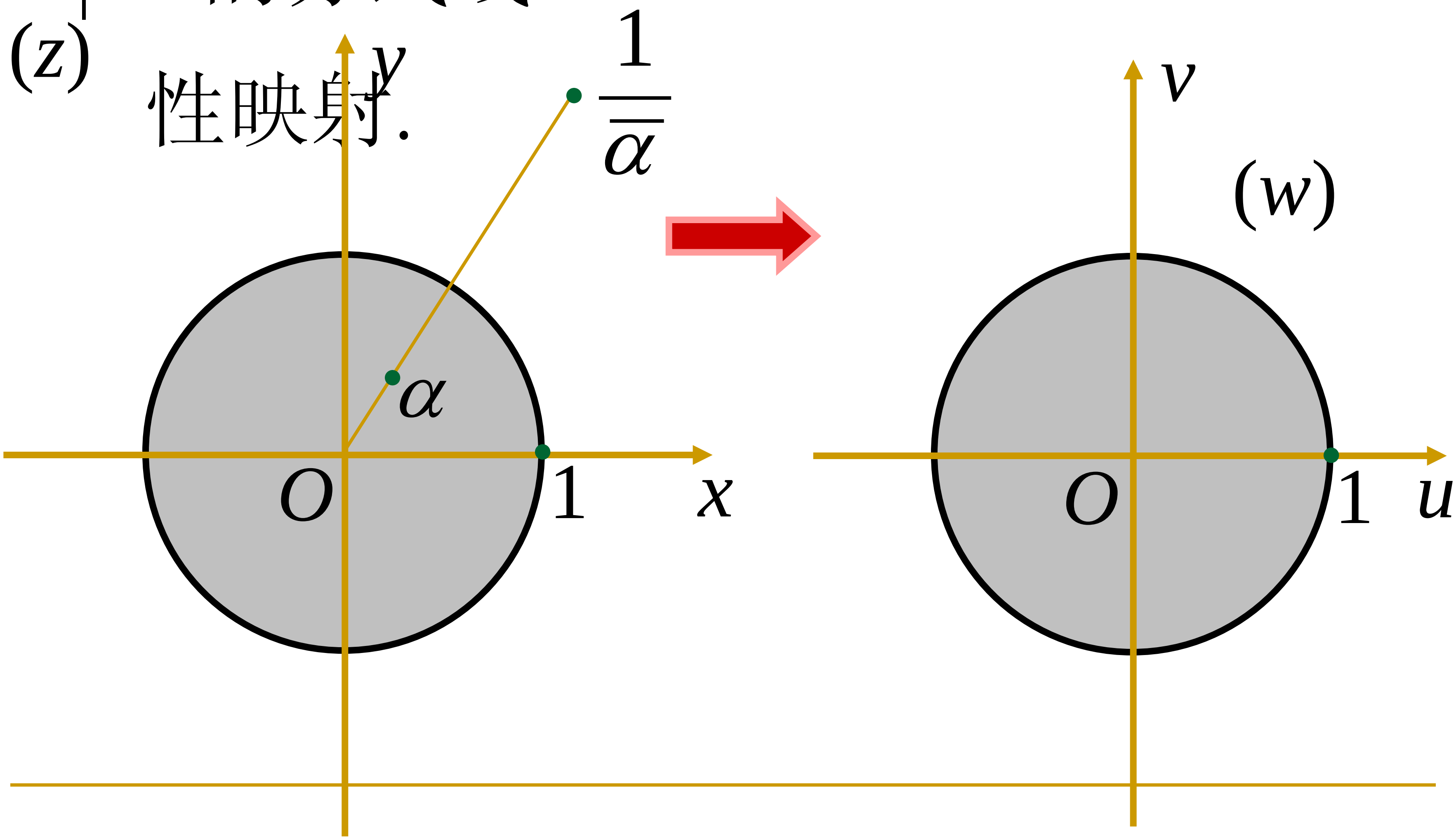
故有 $$w'(z)=e^{i\theta}\frac{4i}{(z+2i)^2},$$

$$w'(2i)=e^{i\theta}\left(-\frac{i}{4}\right).$$

$$\arg w'(2i)=\theta-\frac{\pi}{2}=0,\ \theta=\frac{\pi}{2}.$$

从而得所求的映射为 $$w=i\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right).$$

例5 求将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.



[解] 设z平面上单位圆$|z|<1$内部的一点a映射成w平面上的单位圆$|w|<1$的中心$w=0$. 这时与

点α对称于单位圆周$|z|=1$的点$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$应该被映射成$w$平面上的无穷远点(即与$w=0$对称的点).因此,

当$z=\alpha$时,$w=0$,而当$z=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$时,$w=\infty$.满足这些条件的分式线性映射具有如下的形式

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}}=k\overline{\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}\right)=k'\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right),$$

其中$k'=-k\overline{\alpha}$

由于z平面上单位圆周上的点要映成w平面上单位圆周上的点，所以当$|z|=1$, $|w|=1$. 将圆周$|z|=1$上的点$z=1$代入上式，得

$$|k'|\left|\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}\right|=|w|=1$$

又因 $|1-\alpha|=|1-\bar{\alpha}|$,

- 所以 $|k'|=1$，即$k'=\mathrm{e}^{ij}$. 这里j是任意实数.

因此，将单位圆$|z|<1$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射的一般表示式是

$$\boxed{w=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right). \quad (|\alpha|<1) \qquad (6.3.5)}$$

反之，形如上式的映射必将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$．这是因为圆周 $|z|=1$ 上的点 $z=\mathrm{e}^{iq}$（q为实数）映射成圆周 $|w|=1$ 上的点:

$$|w|=\left|\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\alpha}{1-\overline{\alpha}\,\mathrm{e}^{i\theta}}\right)\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\alpha}{\mathrm{e}^{-i\theta}-\overline{\alpha}}\right|=1.$$

同时单位圆 $|z|<1$ 内有一点 $z=a$ 映射成 $w=0$. 所以 (6. 3. 5) 必将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$.

例6 求将单位圆映射成单位圆且满足条件

$w(1/2)=0$，$w'(1/2)>0$的分式线性映射.

[解] 由条件$w(1/2)=0$知，所求的映射要将$z=1/2$

映射成$|w|<1$的中心. 所以由((6. 3. 5) 得

$$w=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right), w'\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{i\varphi}\left.\frac{\left(1-\frac{1}{2}z\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{i\varphi}\frac{4}{3}$$

故 $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\varphi$，由于 $w'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ 为正实数，从而 $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，

即 $\varphi=0$. 所以所求映射为 $w=\dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}z}=\dfrac{2z-1}{2-z}$.

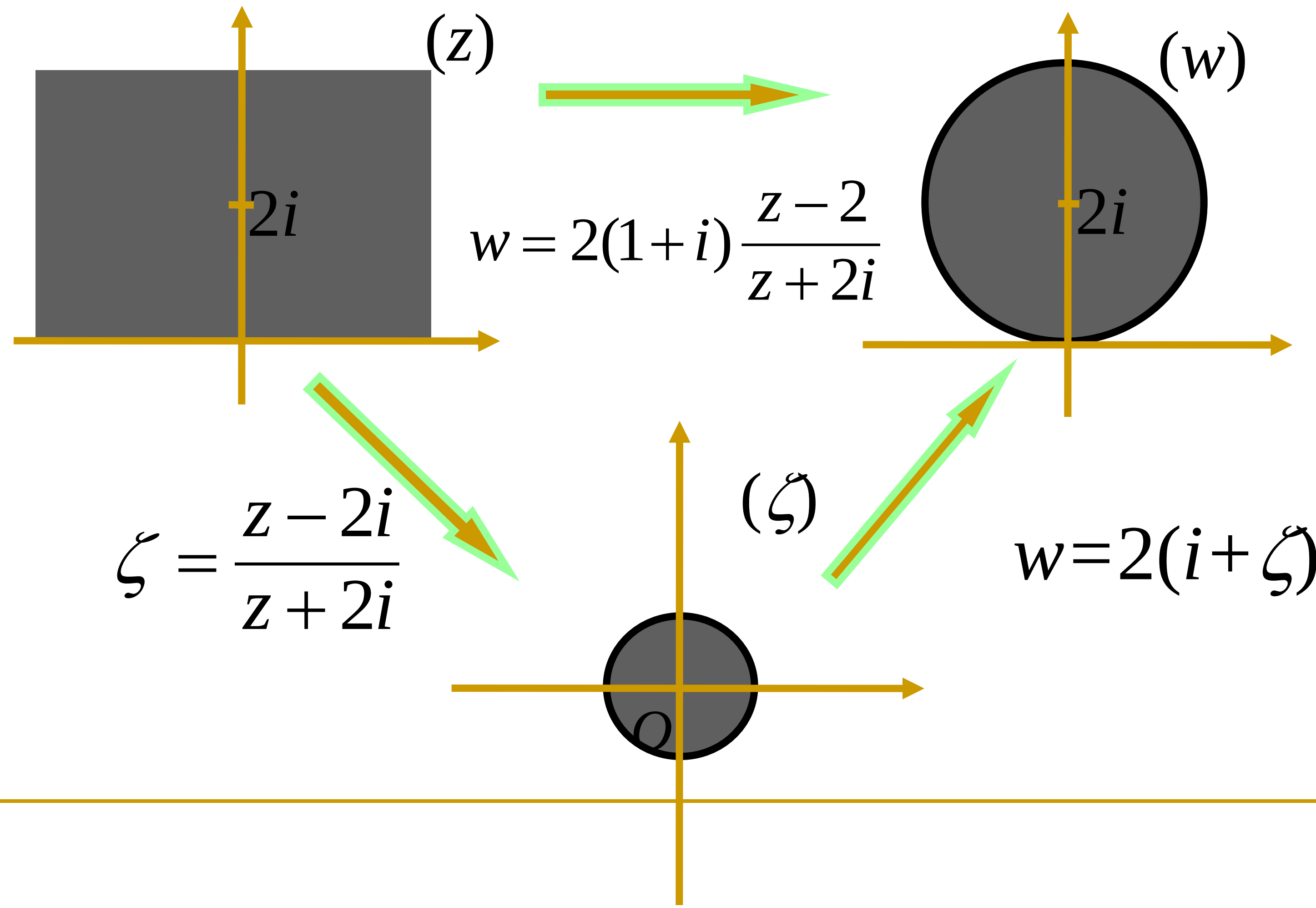
例7 求将Im(z)>0映射成 $|w-2i|<2$ 且满足条件 $w(2i)=2i$，$\arg w'(2i)=-\pi/2$ 的分式线性映射.

[解] 容易看出，映射 $\zeta=(w-2i)/2$ 将 $|w-2i|<2$ 映射成 $|\zeta|<1$. 但将Im(z)>0映射成 $|\zeta|<1$ 且满足 $\zeta(2i)=0$ 的映射易知为

$$\zeta=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)\Rightarrow\frac{w-2i}{2}=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)\Rightarrow w'(2i)=2e^{i\theta}\frac{1}{4i},$$

$$\arg w'(2i)=\arg(2\mathrm{e}^{i\theta})-\arg(4i)=\theta-\frac{\pi}{2}.$$ 由 $\arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}$，得 $\theta=0.$

于是所求映射为 $\dfrac{w-2i}{2}=\dfrac{z-2i}{z+2i}$ 或 $w=2(1+i)\dfrac{z-2}{z+2i}.$



§ 4 几个初等函数所构成的映射

1. 幂函数 $w=z^n$($n\geq 2$为自然数)在z平面内处处可导，它的导数是 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=nz^{n-1}$,因而当$z\neq 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\neq 0.$

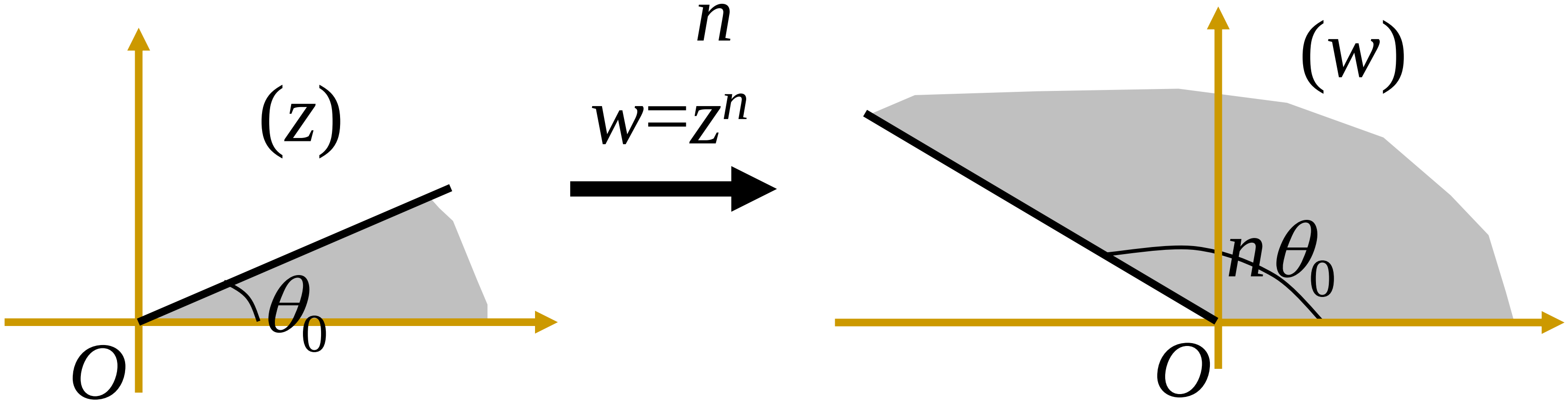
所以，在z平面内除去原点外，由$w=z^n$所构成的映射处处保形.

$$z=re^{i\theta},\ w=\rho e^{i\varphi}\xrightarrow{w=z^n}\begin{cases}\rho=r^n\ 圆周\mapsto 圆周;\\ \varphi=n\theta\ 射线\mapsto 射线。\end{cases}$$

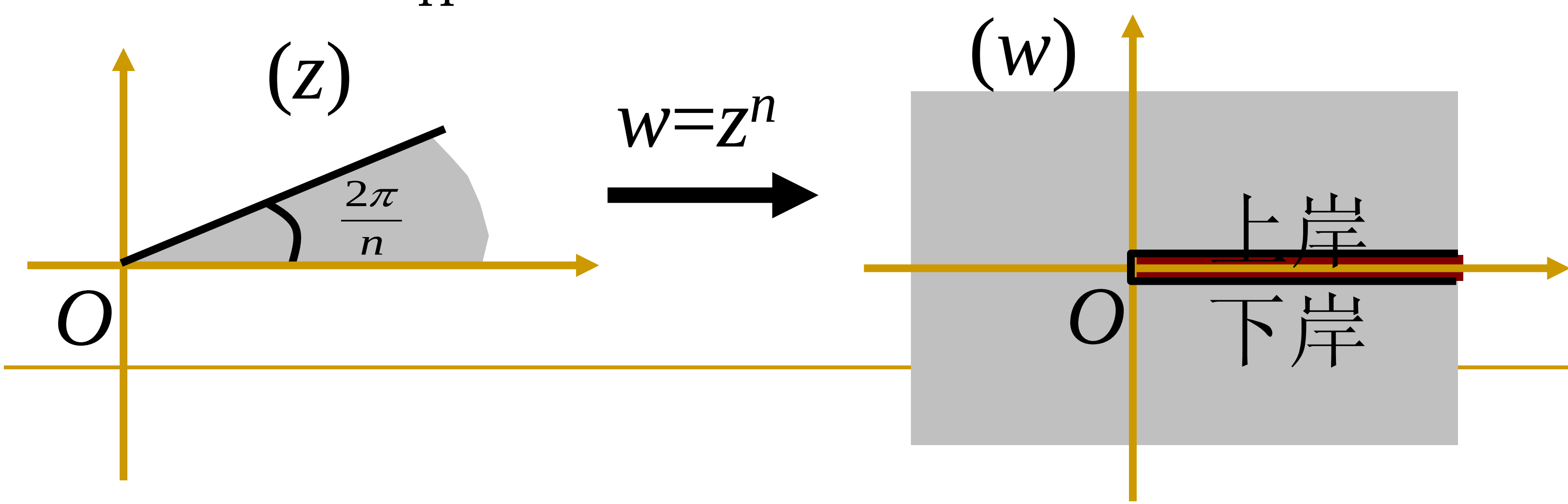
映射的特点是：把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域，但张角变成了原来的n倍.

角形域: $0<\theta<\theta_0 \mapsto$ 角形域: $0<\varphi<n\theta_0$

(由单值性可知 $\theta_0<\dfrac{2\pi}{n}$)



特别, $0<\theta<\dfrac{2\pi}{n} \mapsto$ 沿实轴剪开的w平面: $0<\varphi<2\pi$.



根式函数$z=\sqrt[n]{w}$：$0<\varphi<n\theta_0 \mapsto 0<\theta<\theta_0 \ (\theta_0<\dfrac{2\pi}{n})$

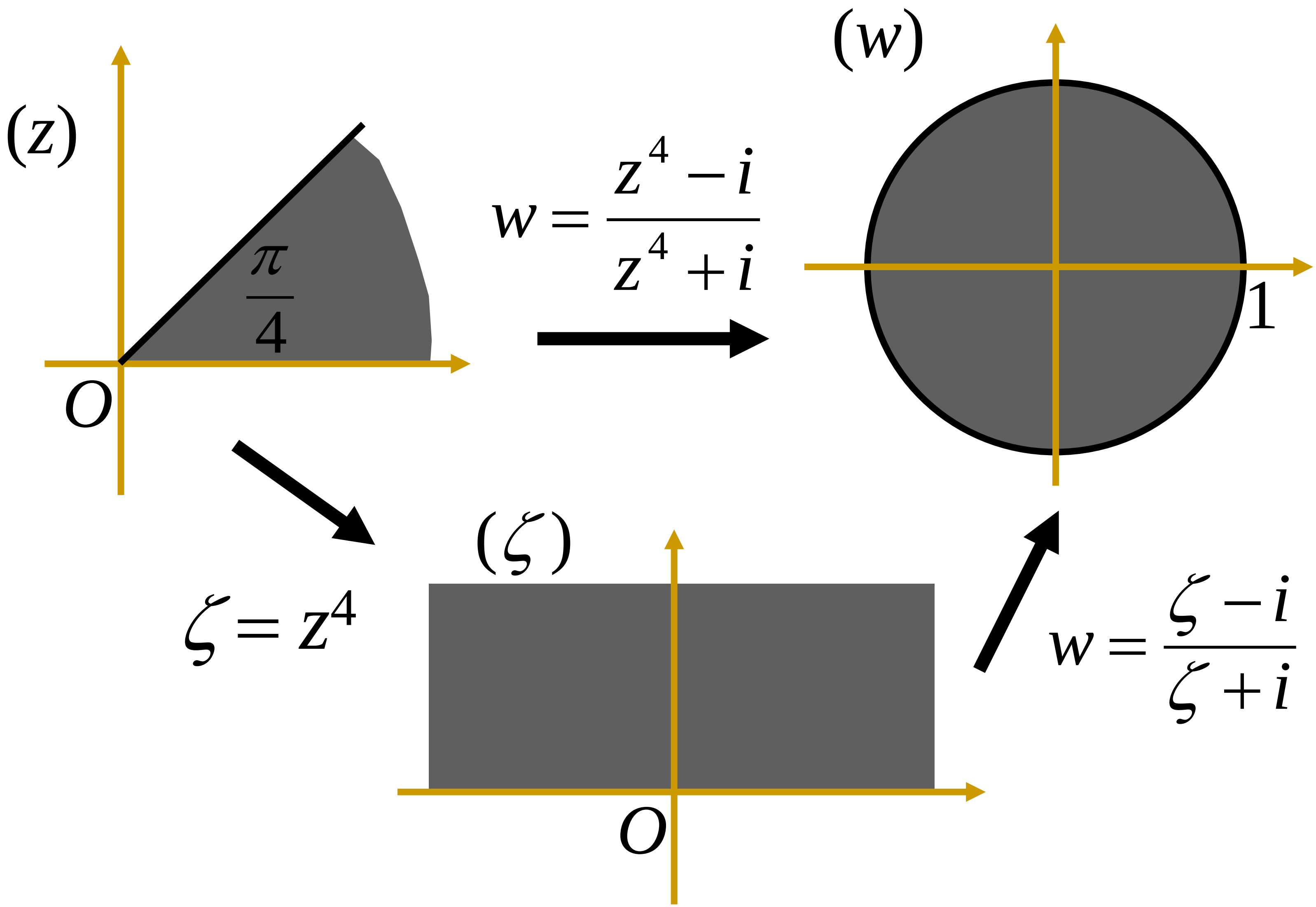
于是$w=z^n$和$z=\sqrt[n]{w}$的映射特点是扩大与缩小角形域。

例1 求把角形域$0<\arg z<\pi/4$映射成单位圆$|w|<1$的一个映射.

[解] $\zeta=z^4$将所给角形域$0<\arg z<\pi/4$映射成上半平面$\mathrm{Im}(\zeta)>0$. 又从上节的例2知, 映射

$w=\dfrac{\zeta-i}{\zeta+i}$将上半平面映射成单位圆$|w|<1$.因此

所求映射为$w=\dfrac{z^4-i}{z^4+i}$.



$$0<\arg z<\frac{\pi}{4}\ \xrightarrow{\xi=z^4}\ Im\,\xi>0\ \xrightarrow{w=\frac{\xi-i}{\xi+i}}\ |w|<1.$$

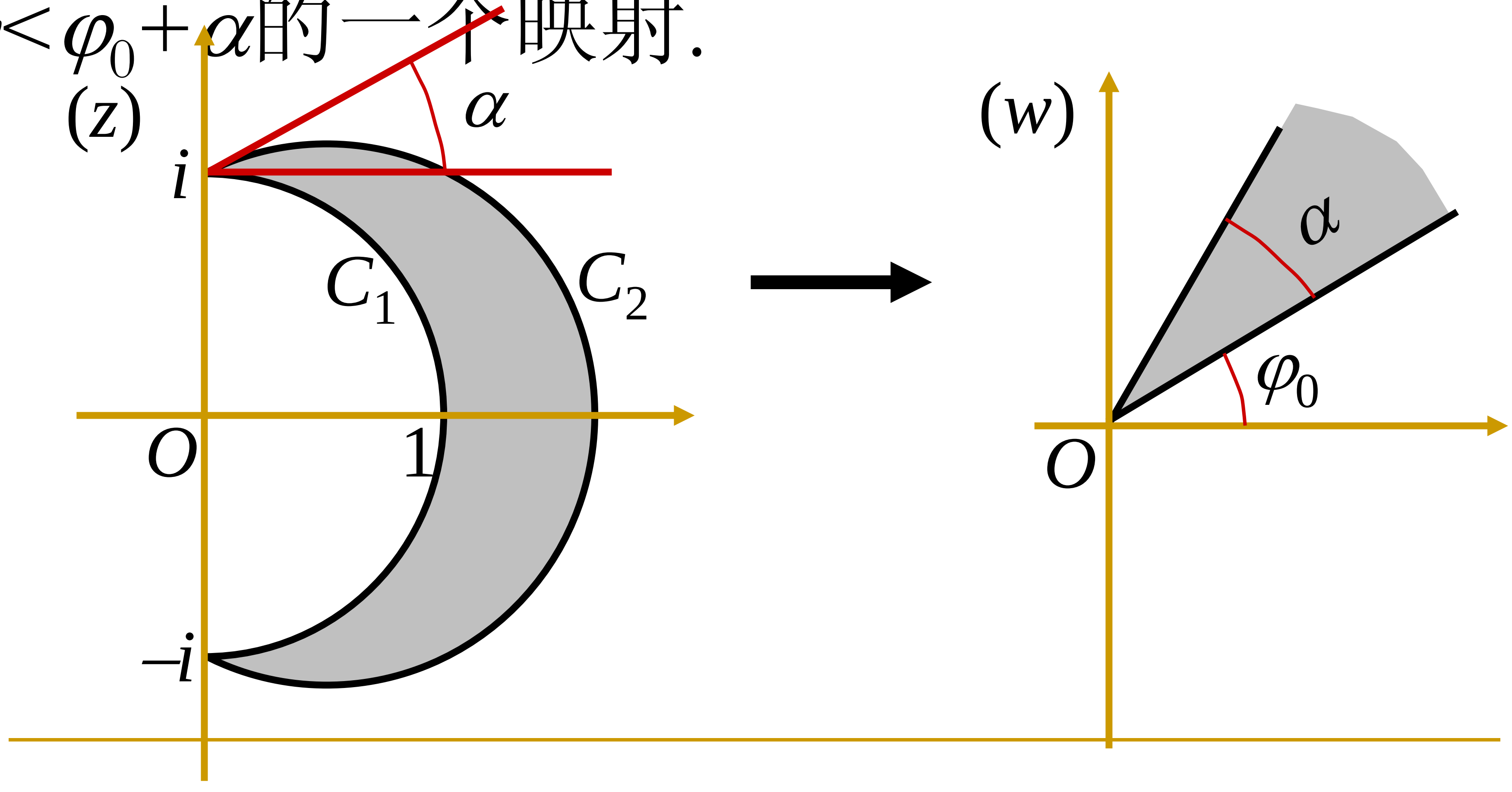
例2 求$\begin{cases} 0<|z|<1 \\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$映为单位园$|w|<1$的一个映射.

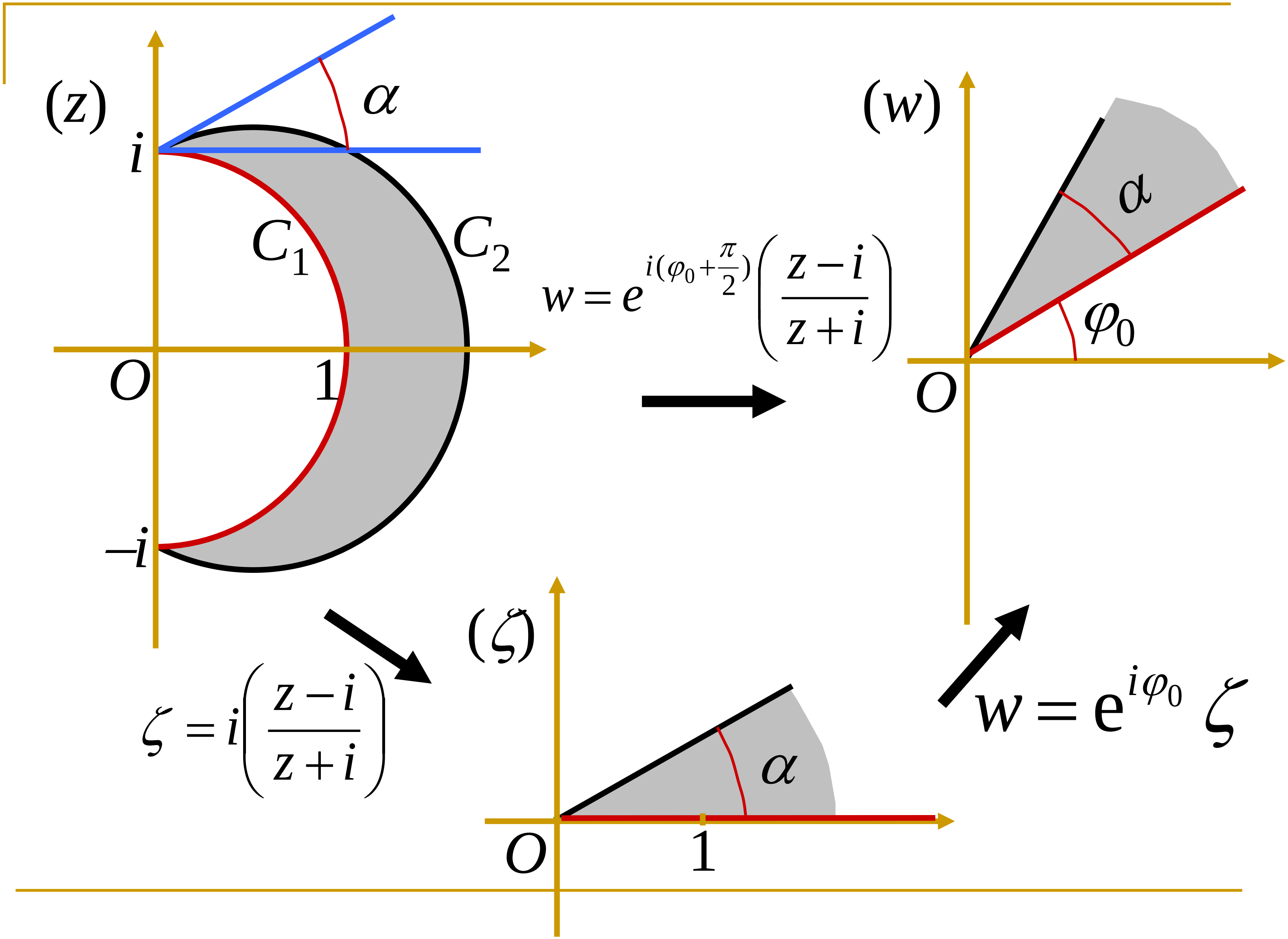
解: $\begin{cases} 0<|z|<1 \\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\xi=z^2} \begin{cases} 0<|\xi|<1 \\ 0<\arg\xi<\pi \end{cases}$

$$\xrightarrow{t=-\frac{\xi+1}{\xi-1}} \begin{cases} \operatorname{Im} t>0 \\ \operatorname{Re} t>0 \end{cases} \xrightarrow{s=t^2} \operatorname{Im} s>0$$

$$\xrightarrow{w=\frac{s-i}{s+i}} |w|<1 \quad \Rightarrow w=\frac{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2-i}{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2+i}.$$

例3 求把下图中由圆弧C_2与C_3所围成的交角为α的月牙域映射成角形域$\varphi_0<\arg w<\varphi_0+\alpha$的一个映射.





(z)
i
α
C_1
C_2
O
1
$-i$
$w = e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$
(w)
α
φ_0
O
$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$
(ζ)
α
O
1
$w = e^{i\varphi_0}\,\zeta$

[解] 令C_1,C_2的交点$z=i$与$z=-i$分别映射成ζ平面中的$\zeta=0$与$\zeta=\infty$, 将所给月牙域映射成ζ平面中的角形域的映射是具有以下形式的分式线性函数:

$$\zeta=k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

其中k为待定的复常数.

令 $z=1\mapsto\zeta=1\Rightarrow\zeta=k\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=-ik=1\Rightarrow k=i$。

这样,$\zeta=i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$就把$C_1$映射成$\zeta$平面上的正实轴.

根据保角性,所给的月牙域映射成角形域$0<\arg\zeta<\alpha$.

由此得所求的映射为$w=ie^{i\varphi_0}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$.

2. 指数函数 $w=e^{z}$由于在z平面内$w'=e^{z}\neq 0$。

所以, 由 $w=e^{z}$所构成的映射是$0<y<2\pi$上的保形映射.

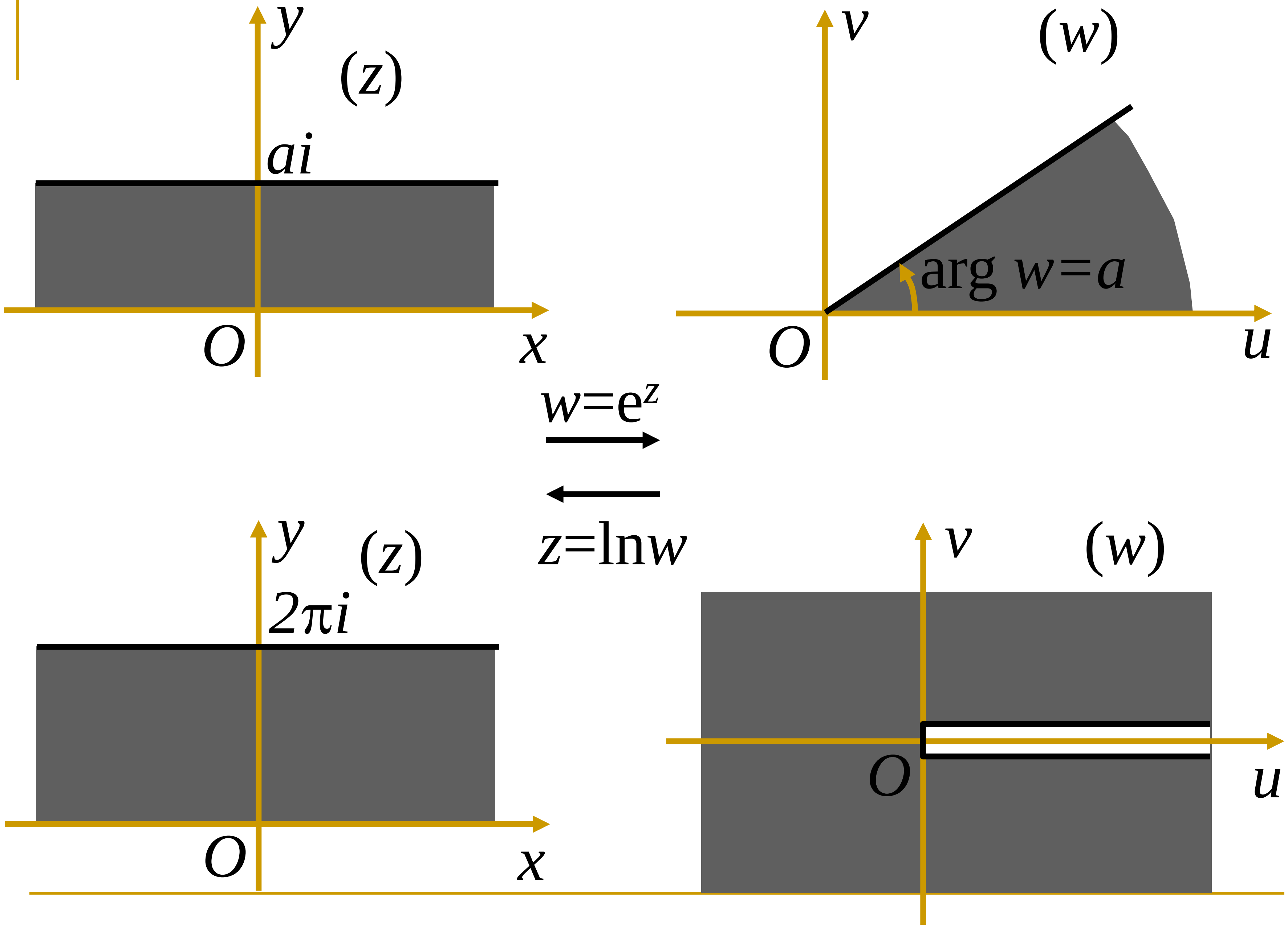
设$z=x+iy$, $w=\rho e^{i\varphi}$, 则$w=e^{z}=e^{x+iy}=\rho e^{i\varphi}$ 推出

$\rho=e^{x}$： z平面上垂直线x映射成w平面上圆周ρ;

（$x=0$–单位圆周,$x<0$ –单位圆内,$x>0$ –单位圆外）

$\varphi=y$： z平面上水平直线y映射成w平面上射线φ。

带形域$0<\mathrm{Im}(z)<a$映射成角形域$0<\arg w<a$. 特别是带形域$0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$映射成沿正实轴剪开的w平面:$0<\arg w<2\pi$.它们间的点是一一对应的.



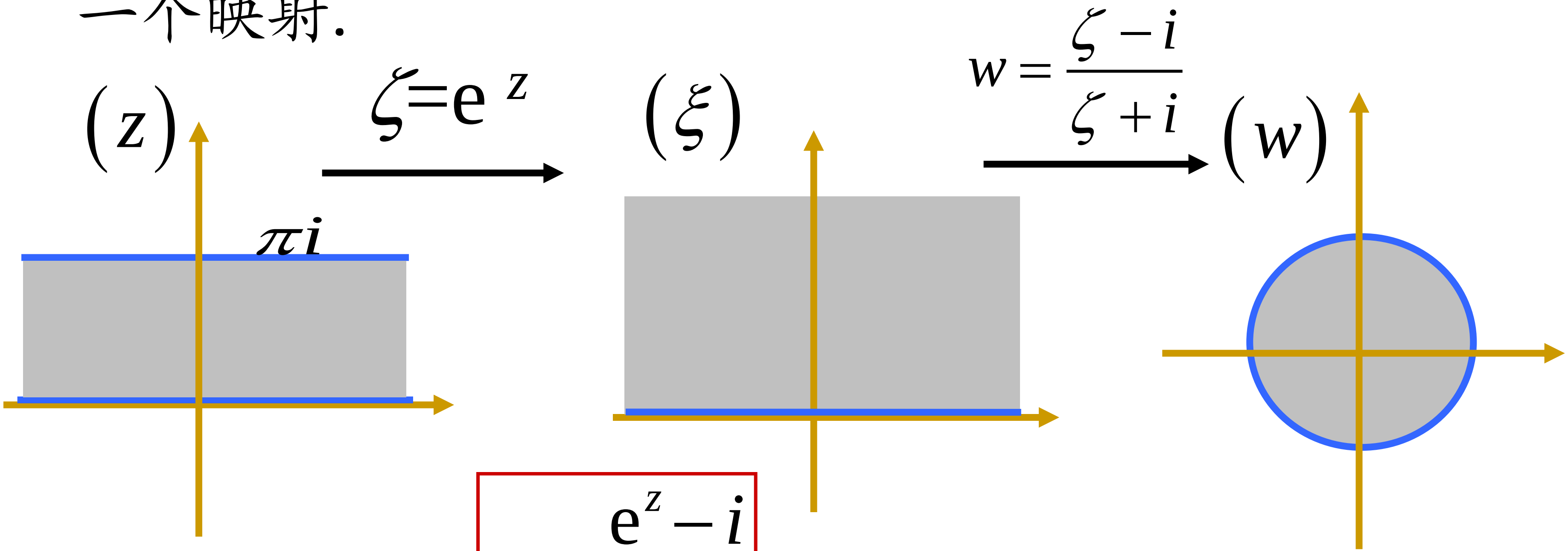
y
(z)
ai
O
x
v
(w)
arg w=a
O
u
w=e^z
z=lnw
y
(z)
2πi
O
x
v
(w)
O
u

由指数函数$w=\mathrm{e}^{z}$所构成的映射的特点是:

把水平的带形域$0<\mathrm{Im}(z)<a$ $(a\leq \mathrm{p})$映射成角形域

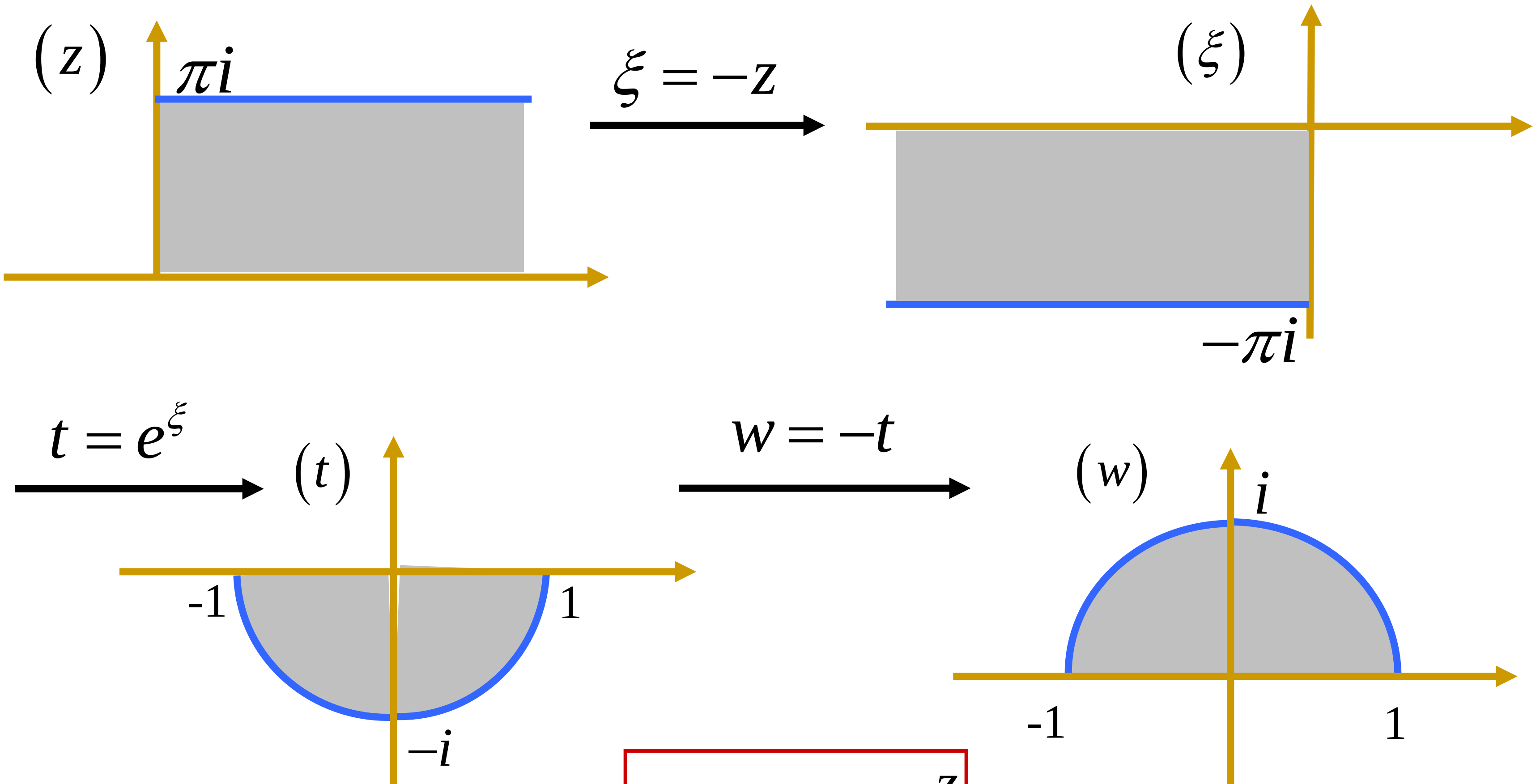
$0<\arg w<a$.

例4　求把带形域$0<\mathrm{Im}(z)<\mathrm{p}$映射成单位圆$|w|<1$的一个映射.



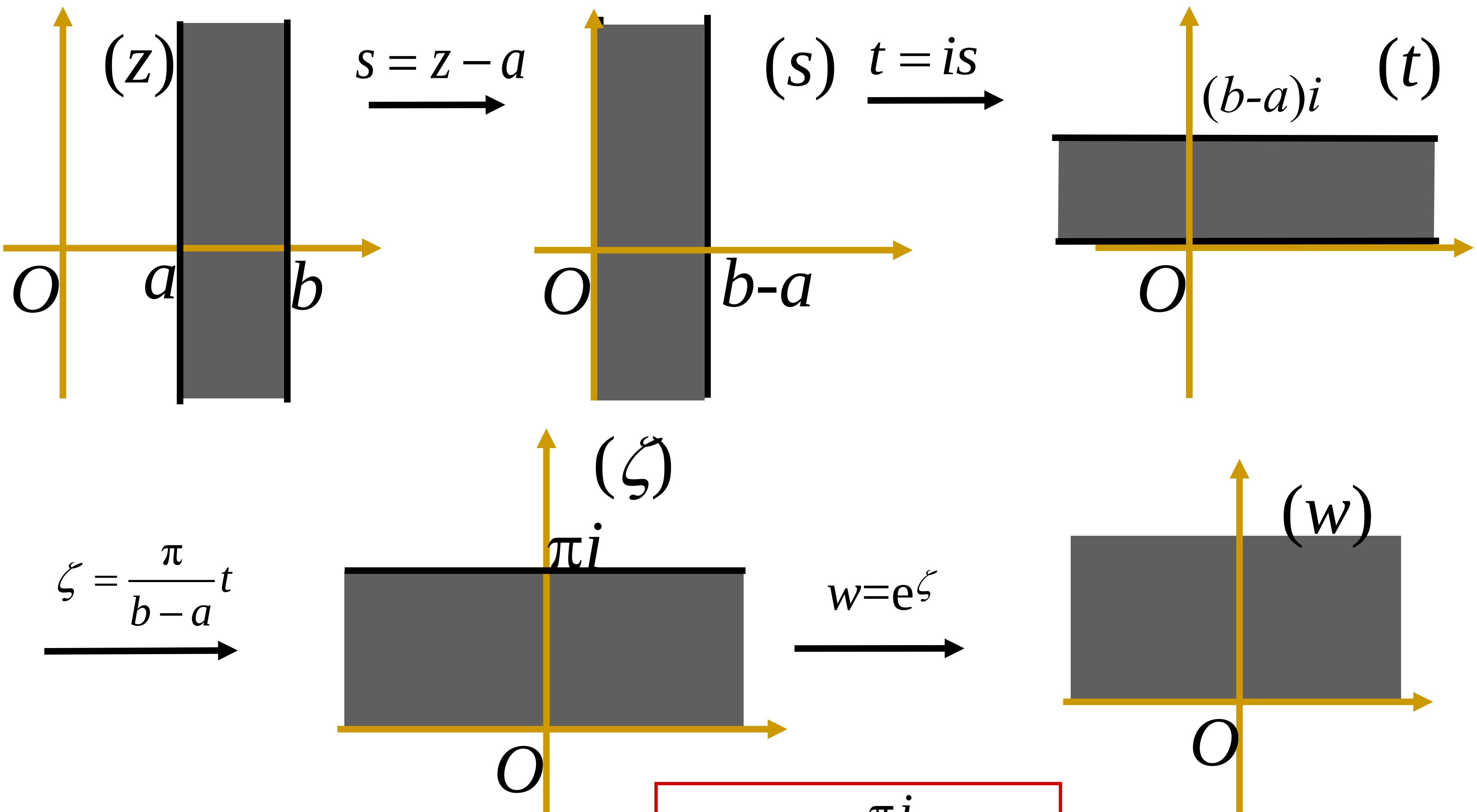
$$\boxed{w=\frac{\mathrm{e}^{z}-i}{\mathrm{e}^{z}+i}}$$

例4 求映射把如图所示的半带状域映成上半单位圆。



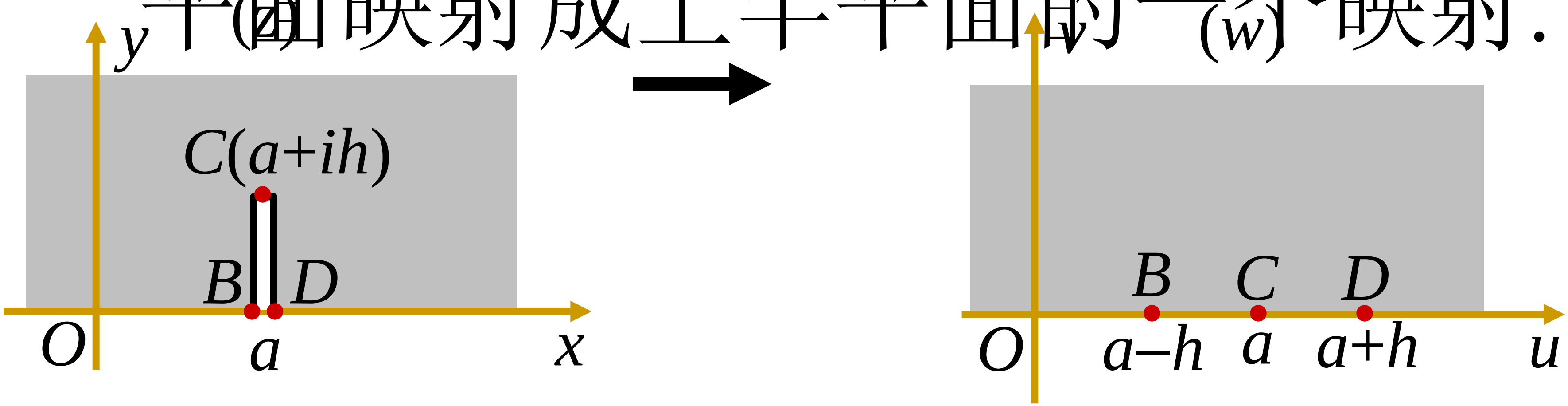
$$\boxed{w=-e^{-z}}$$

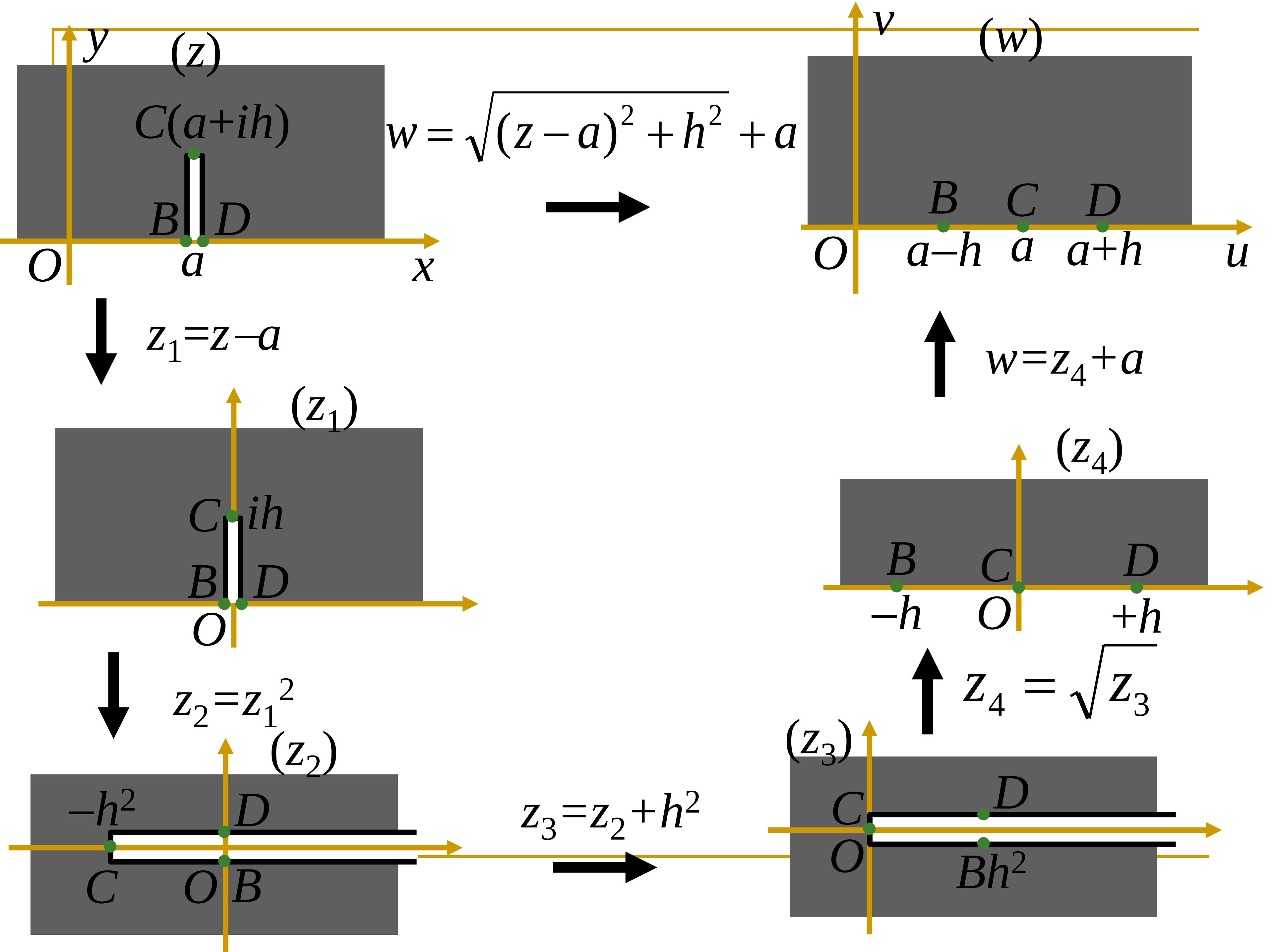
例5 求把带形域$a<\mathrm{Re}(z)<b$映射成上半平面$\mathrm{Im}(w)>0$的一个 映射.



$$\boxed{w = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}}$$

例6 求把具有割痕$\mathrm{Re}(z)=a,\ 0\le \mathrm{Im}(z)\le h$的上半平面映射成上半平面的一个映射.





(z)
y
$C(a+ih)$
B
D
O
a
x
$w=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$
(w)
v
B
C
D
O
$a-h$
a
$a+h$
u
$z_1=z-a$
(z_1)
C
ih
B
D
O
$w=z_4+a$
(z_4)
B
C
D
$-h$
O
$+h$
$z_4=\sqrt{z_3}$
$z_2=z_1{}^2$
(z_2)
$-h^2$
D
C
O
B
$z_3=z_2+h^2$
(z_3)
C
D
O
Bh^2

[解] 不难看出, 解决本题的关键显然是要设法将垂直于x轴的割痕的两侧和x轴之间的夹角展平. 由于映射$w=z^2$能将顶点在原点处的角度增大到两倍, 所以利用这个映射可以达到将割痕展平的目的.

首先, 把上半z平面向左平移一个距离

a: $z_1=z-a$.

第二, 由映射$z_2=z_1^2$, 得到具有割痕-

第四, 通过映射$z_4=\sqrt{z_3}$, 使得到上半z_4平面.

$b^2\le \mathrm{Re}(z_2)<+\infty$,

最后,把z_4平面向右作一距离为a的平移:

$w = z_4 + a$,便得到w平面中的上半平面.

把所有的映射复合起来就得到所求出映射:

$$w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a$$