暨南大学复变函数教学课件

暨南大学数学系

高凌云

二0一一年九月至二0一二年一月

Department of Mathematics
Jinan Univ. 2011

第三章　复变函数的积分

第一节　柯西定理

第二节　柯西公式

Department of Mathematics
Jinan Univ.　2009

第一节 柯西定理

1、复变函数积分
2、几个引理
3、柯西定理

第三章　复变函数的积分

同微积分一样，在复变函数中，积分法也是研究复变函数性质十分重要的方法.在解决实际问题中也是有力的工具.

本章先介绍复变函数积分的概念，性质和计算方法然后介绍关于解析函数积分的柯西－古萨基本定理及其推广，有了这些基础，我们建立柯西积分公式，最后证明解析函数的导数仍是解析函数，从而导出高阶导数公式

1、复变函数积分的定义

设在复平面C上有一条连接z_0及Z两点的简单曲线*C*。设*f*(*z*)=*u*(*x*,*y*)+*iv*(*x*,*y*)是在*C*上的连续函数。其中*u*(*x*,*y*)及*v*(*x*,*y*)是*f*(*z*)的实部及虚部。

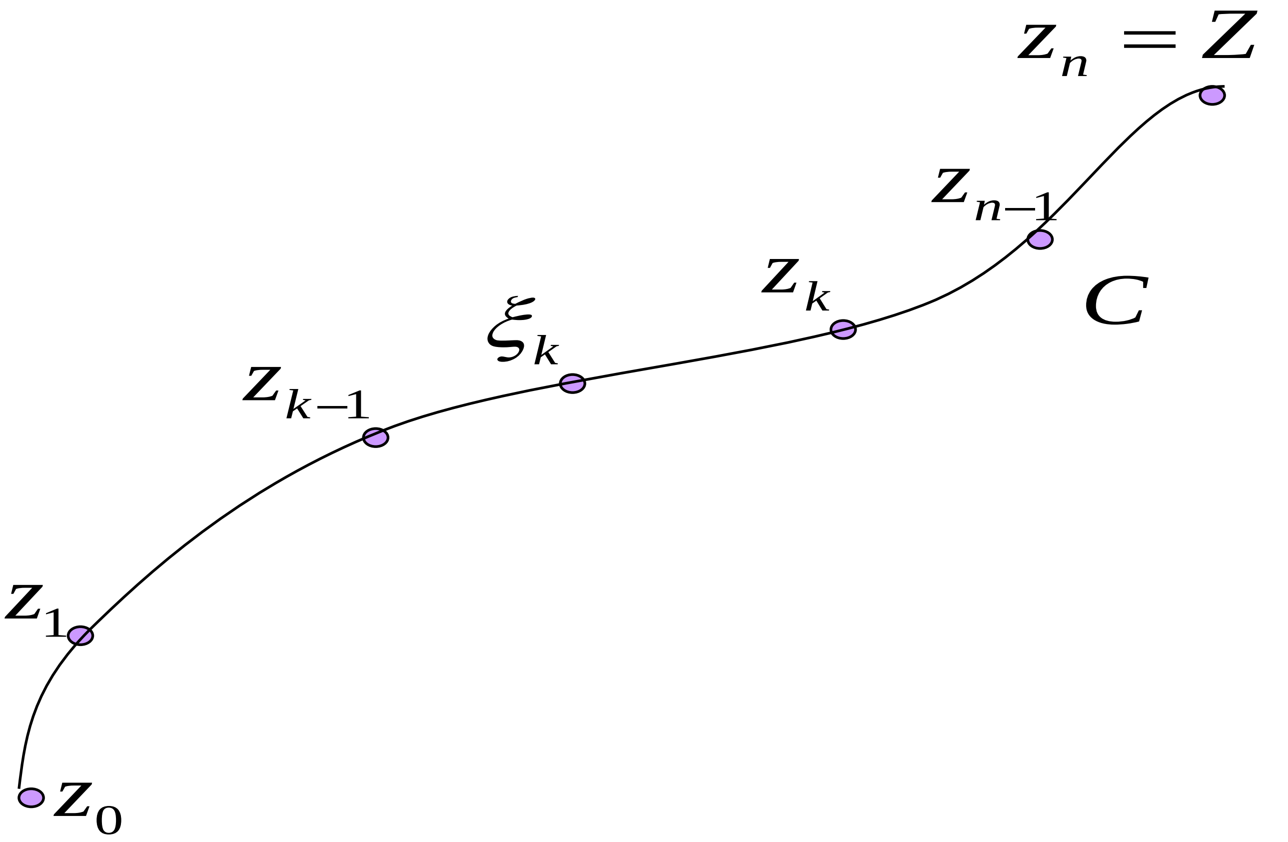
把曲线*C*用分点 $z_0, z_1, z_2 \ldots, z_{n-1}, z_n = Z$

分成*n*个更小的弧，在这里分点 $z_k (k = 0,1,2,\ldots,n)$

是在曲线*C*上按从 z_0 到Z的次序排列的。

如果ζ_k是 z_k 到 z_{k+1}的弧上任意一点，那么考虑和式

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$$


$z_n = Z$
z_{n-1}
z_k
C
ξ_k
z_{k-1}
z_1
z_0

分实部与虚部，有

$$\sum_{k=1}^{n-1}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)][(x_{k+1}-x_k)+i(y_{k+1}-y_k)]$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n-1}u(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)-\sum_{k=1}^{n-1}v(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k)$$

$$+i[\sum_{k=1}^{n-1}v(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)+\sum_{k=1}^{n-1}u(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k),$$

在这里 x_k、y_k及ξ_k、η_k 分别表示的 z_k与ξ_k

实部与虚部。

按照关于实变函数的线积分的结果，当曲线C上的分点个数无穷增加，而且

$$\max\{|z_{k+1}-z_k|=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}$$

$$\to 0 \mid k=0,1,2,\ldots,n-1\}\to 0$$

时，上面的四个式子分别有极限：

$$\int_C u(x,y)\mathrm{d}x, \int_C v(x,y)\mathrm{d}y, \int_C v(x,y)\mathrm{d}x, \int_C u(x,y)\mathrm{d}y,$$

这时，我们说原和式有极限

$$\int_C u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + i\int_C v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y,$$

这个极限称为函数*f*(*z*)沿曲线*C*的积分，记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_C f(z)\mathrm{d}z\\&=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+i\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

如果C是简单光滑曲线：$x=\varphi(t), y=\phi(t)(t_0 \le t \le T)$

，并且 t_0及T相应于z_0及Z，那么上式右边的积分可以写成黎曼积分的形式，例如其中第一个可以写成

$$\int_{t_0}^{T} u(\varphi,\phi)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

因此，我们有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{T} [u(\varphi,\phi)+iv(\varphi,\phi)][\varphi'(t)+i\phi'(t)]\mathrm{d}t$$

我们可以看到，把dz形式地换成微分，就直接得到上式，因此有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

当是分段光滑简单曲线时，我们仍然可以得到这些结论。

复变函数积分的性质：

复变函数积分的基本性质：设$f(z)$及$g(z)$在简单曲线C上连续，则有

（1）$\int_C \alpha f(z)\mathrm{d}z = \alpha\int_C f(z)\mathrm{d}z$，其中$\alpha$是一个复常数；

（2）$\int_C [f(z)+g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_C g(z)\mathrm{d}z$;

（3）$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \ldots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$

其中曲线C是由光滑的曲线$C_1, C_2, \ldots, C_n$连接而成；

（4）$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z$，

积分是在相反的方向上取的。

如果C是一条简单闭曲线，那么可取C上任意一点作为取积分的起点，而且积分当沿C取积分的方向改变时，所得积分相应变号。

（5）如果在C上，$|f(z)|<M$，而L是曲线C的长度，其中M及L都是有限的正数，那么有，

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML$$

证明：因为

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)\right| \le M\sum_{k=1}^{n-1}|z_{k+1}-z_k| \le ML$$

两边取极限即可得结论。

例1、设C是连接 z_0 及Z两点的简单曲线，那么

$$\int_C dz = Z - z_0$$

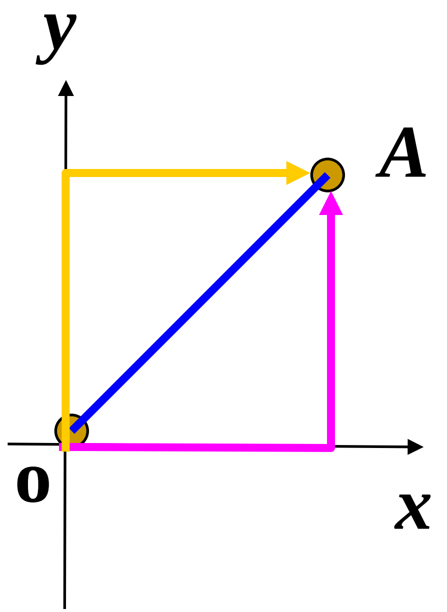
$$\int_C z dz = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0{}^2).$$

如果是C闭曲线，即 $Z = z_0$ ，那么积分都是零。

例2 计算$\int_C \bar{z}dz$ $\quad \overline{OA}:\begin{cases} x=3t \\ y=4t \end{cases}(0\le t\le 1)$

解 $\int_C \bar{z}dz=\int_0^1 (3-4i)t\cdot(3+4i)dt$

$$=(3+4i)^2\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}(3+4i)^2$$



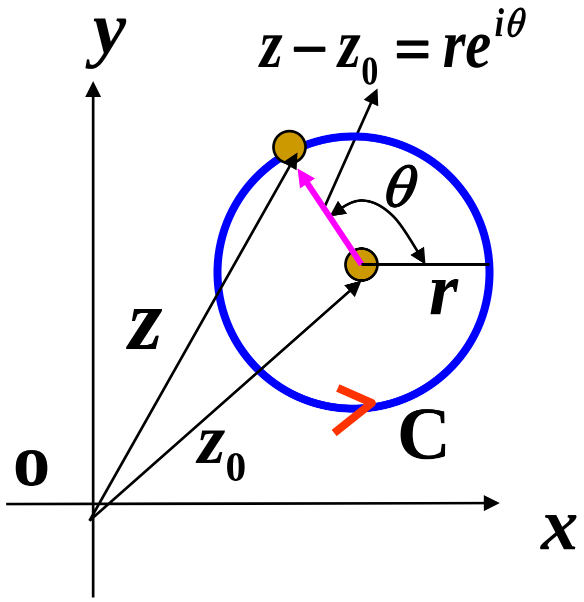
又解 $\int_C zdz=\int_C (x+iy)(dx+idy)$

$$=\int_C xdx-ydy+i\int_C ydx+xdy$$

容易验证,右边两个积分都与路径无关,

$\therefore\ \forall$连接OA的曲线C,其上积分:$\int_C f(z)dz=\frac{1}{2}(3+4i)^2$

例3 计算$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$这里$C$表示以$z_0$为中心，$r$为半径的正向圆周，$n$为整数.



解 $C: z = z_0 + re^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \begin{cases} i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i & n=0 \\ \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta) d\theta = 0 & n \ne 0 \end{cases}$$

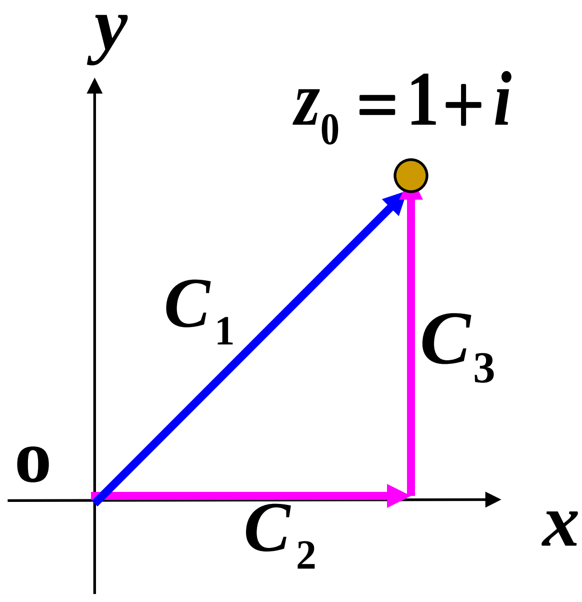
$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

这个结果与半径r及z_0无关,这个结果以后经常用到,应记住.

例4 计算$\int_C \bar{z}dz$的值

1) $C = C_1 = \overline{Oz_0}$

2) $C = C_2 + C_3$(见图)



解 1) $C_1: \quad z = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$$

2) $C_2: z = t \quad 0 \le t \le 1 \quad C_3: z = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$$

$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + i) = 1 + i$$

例4 计算$\int_{C_1}\bar{z}dz,\int_{C_2}\bar{z}dz$的值, 其中

C_1是单位圆$|z|=1$的上半圆周, 顺时针方向;

C_2是单位圆$|z|=1$的下半圆周，逆时针方向.

解: 1)C_1： $z=e^{i\theta},0\le\theta\le\pi.$

$$\int_{C_1}\bar{z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}dt=-\pi i$$

2)C_2： $z=e^{i\theta},-\pi\le\theta\le 0.$

$$\int_{C_2}\bar{z}dz=\int_{-\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{0}dt=\pi i$$

柯西积分定理

3.1 Cauchy积分定理

3.2 Cauchy定理的推广

3.3 复周线情形的Cauchy定理

3.4 不定积分

3.5 小结与思考

目的

引言:

研究复积分与路径的无关性:

由例3.1受到的启发 →积分与路径无关与函数沿着围线的积分值为零有何关系

首先:若复积分与路径无关,则对任意围线C,

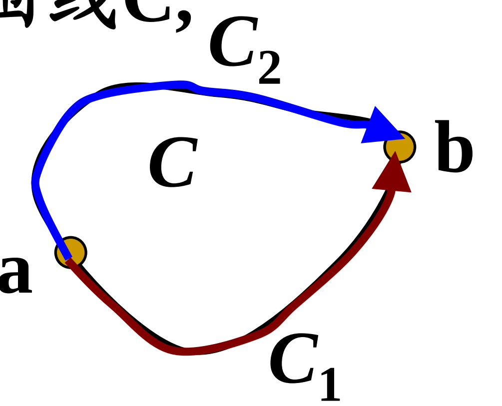
在其上任取两点按a(起点),b(终点)

将曲线C分成两部分 $C = C_1 + C_2^-$

因为积分与路径无关,所以:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$



结论1:若函数$f(z)$的积分与路径无关,

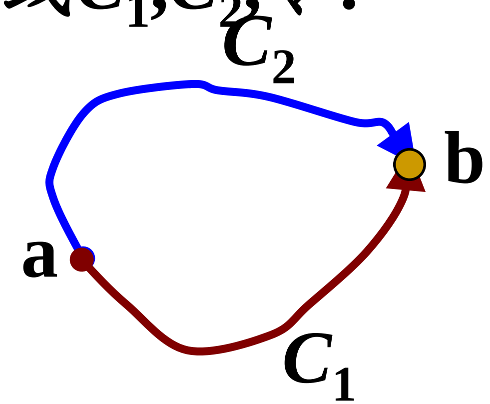
$$\Rightarrow \forall \text{周线} C: \int_C f(z)dz = 0$$

反之:若对任意围线C,$f(z)$沿着C的积分为零,若复积分与路径无关,

则对任意两条以a为起点,b为终点的曲线C_1,C_2,令:

$$C = C_1 + C_2^-$$

则C是周线，从而:



$$\int_C f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

结论2: $\forall \text{周线} C: \int_C f(z)dz = 0 \Rightarrow$

函数$f(z)$的积分与路径无关,

目的 研究复积分与路径的无关性:

转换为研究函数沿着周线的积分为零:

观察上节例3.1

$f(z)=1$或z 在复平面内处处解析, $\Rightarrow \int_C f(z)dz=0$

观察上节例3.2 被积函数当$n=0$时为$\dfrac{1}{z-z_0}$,

它在以z_0为中心的圆周C 的内部不是处处解析的,

此时$\oint_c \dfrac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i\neq 0.$

虽然在除去z_0 的C 的内部函数处处解析,

但此区域已不是单连通域.

由以上讨论可知，积分是否与路线有关，可能决定于被积函数的解析性及区域的连通性.

受此启发，Cahchy与1825年给出如下定理

定理3.3-0 设D为单连通域，函数$f(z)$在D内满足：

(1) $f(z)\in A(D)$, (2) $f'(z)\in C(D)$,

$\Rightarrow$ 对 D 内的任何一条周线 C，有: $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$

1900，法国数学家Goursat给出如下定理:

如果$f(z)\in A(D)\Rightarrow f'(z)\in A(D)\Rightarrow f'(z)\in C(D)$，这样就得到了定理3.3

3.3.单连通区域的Cauchy积分定理

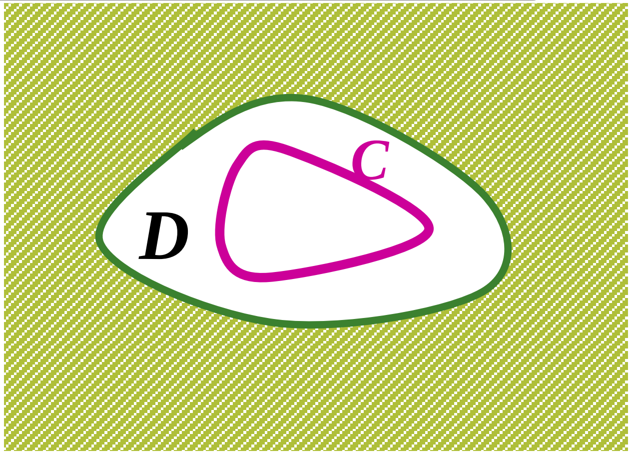
定理3.3　柯西－古萨基本定理

设D为单连通域，如果函数$f(z)\in A(D)$

$\Rightarrow$对D内的任何一条周线C，有：$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$

此定理常称为柯西积分定理.

定理中的C可以不是简单曲线.



3.2 Cauchy定理的推广

推论3.4 柯西定理

设D为单连通域，如果函数 $f(z)\in A(D)$

不必是简单闭曲线

$\Rightarrow$ 对 D 内的任何一条闭曲线 C，

有:

$$\oint_c f(z)dz = 0.$$

推论3.5 柯西定理

设D为单连通域，如果函数 $f(z)\in A(D) \Rightarrow f(z)$

在 D 内的积分与路径无关，即对任给的z_0, z_1积分

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

的值，不依赖于D内连接起点a与终点b的曲线的形状

与定理3.3等价的形式是:

定理 3.3′ 如果周线 C的内部是区域,($I(C)=D$)

函数$f(z)$在闭区域 $\bar{D}=D+C$ 上解析,

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

定理3.9 如果 C是周线, $I(C)=D$是区域

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ f(z)\in A(D),\\(2)\ f(z)\in C(\bar{D})\end{array}\right\}\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

例1　计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{dz}.$

解　函数 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \le 1$ 内解析,

根据柯西定理，有 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{dz} = 0.$

例2　证明 $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{dz} = 0 \quad (n \neq -1)$, 其中 C 是任意闭曲线.

证　(1)当 n 为正整数时, $(z-\alpha)^n$ 在 z 平面上解析,

由柯西—古萨定理, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{dz} = 0.$

(2)当 n 为负整数但不等于 -1 时,

$(z-\alpha)^n$ 在除点 α 的整个 z 平面上解析,

情况一： 若 C 不包围 α 点,

$(z-\alpha)^n$ 在 C 围成的区域内解析,

由柯西—古萨定理, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0;$

情况二： 若 C 包围 α 点,

由上节例4可知, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0.$

例3 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz.$

解 $$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$$

因为 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西一古萨定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right) dz$$

$$= \underbrace{\boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i}\,\mathrm{d}z}}_{=0} - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$$

3.4 复周线情形的Cauchy定理

实例，计算 $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z-1}dz.$

因为 $|z|=2$ 是包含 $z=1$ 在内的闭曲线,

根据本章第一节例4可知,

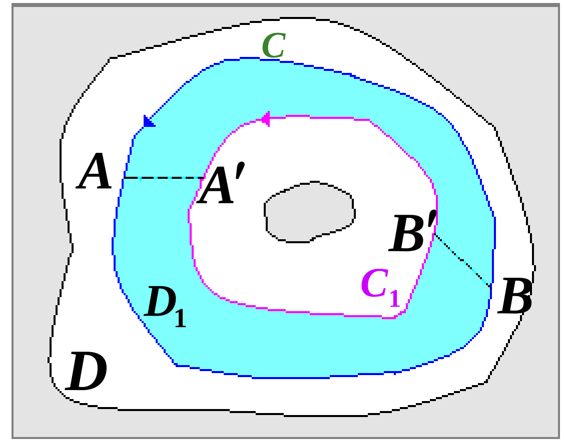
$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z-1}dz=2\pi i.$$

由此希望将基本定理推广到多连通区域中.

1. 闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析,

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向),



C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.

作两段不相交的弧段 $\overset{\frown}{AA'}$ 和 $\overset{\frown}{BB'}$,

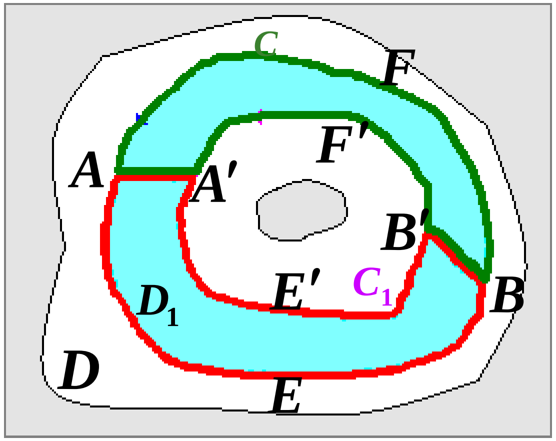
为了讨论方便,添加字符 E, E', F, F',

显然曲线 $AEBB'E'A'A, AA'F'B'BFA$ 均为封闭曲线.

因为它们的内部全含于 D,

故 $$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)dz = 0,$$

$$\oint_{AA'F'B'BFA} f(z)dz = 0.$$



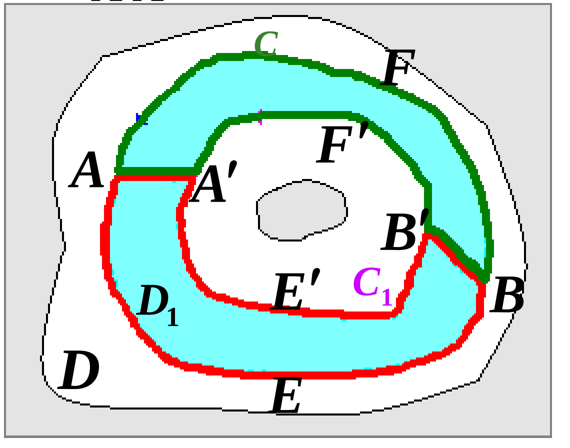
$$AEBB'E'A'A = \overset{\frown}{AEB} + \overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{B'E'A'} + \overset{\frown}{A'A},$$

$$AA'F'B'BFA = \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{A'F'B'} + \overset{\frown}{B'B} + \overset{\frown}{BFA},$$

由 $\oint\limits_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z + \oint\limits_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0$, 得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\widehat{AA'}} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\widehat{A'A}} f(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \oint_{\widehat{B'B}} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\widehat{BB'}} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$



即 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$,

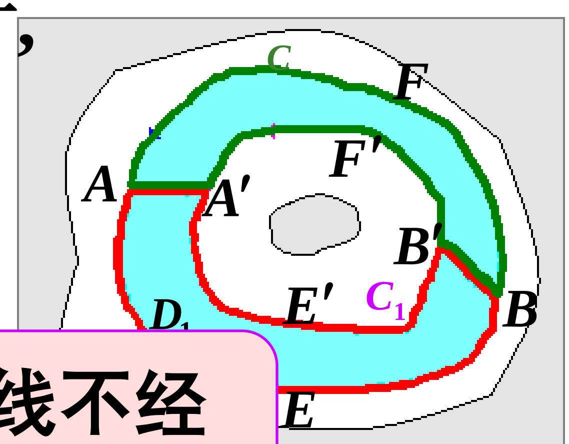
或 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$.

如果我们把这两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成一条复合闭路 Γ，Γ 的正方向为：

外面的闭曲线 C 按逆时针进行，

内部的闭曲线 C_1 按顺时针进行，

(即沿 Γ 的正向进行时，Γ 的内部总在 Γ 的左手边)，



那

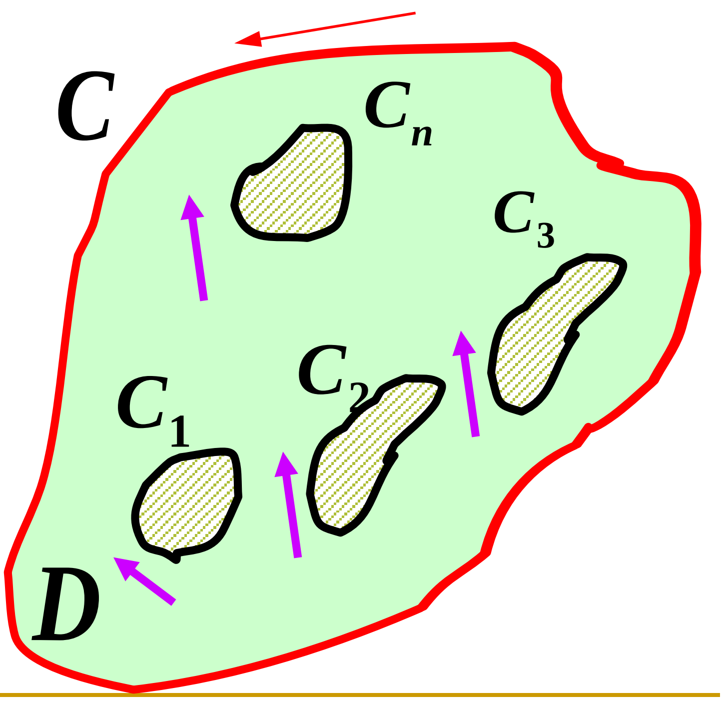
说明：在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析的点.

解析函数 曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值. 闭路变形原理

2. 复周线情形的Cauchy定理

设 C 为周线, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的周线,它们互不包含也互不相交, 并且由 C的内部, $C_1, C_2, \cdots, C_n$的外部围城多连通区域D,

则称$C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$为复围线,D为其内部,记为$I(D)$.



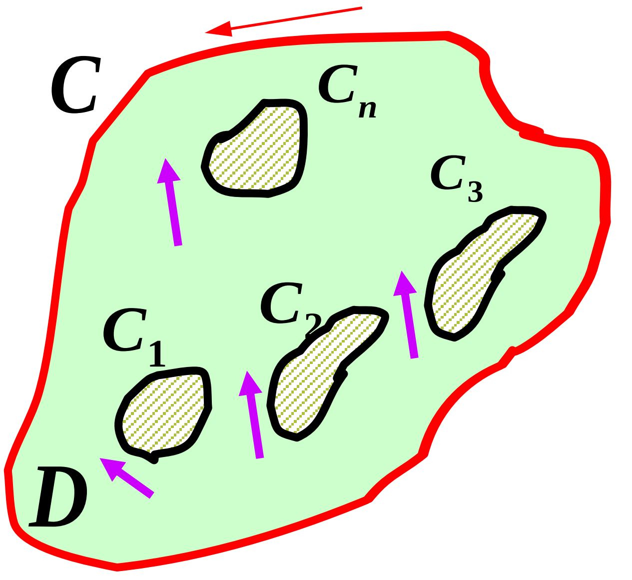
定理3.10 设$C+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$是复周线, $D=I(C)$

如果: $(1)\ f(z)\in A(D)$, $(2)\ f(z)\in C(\bar{D})$,

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z+\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k^-} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

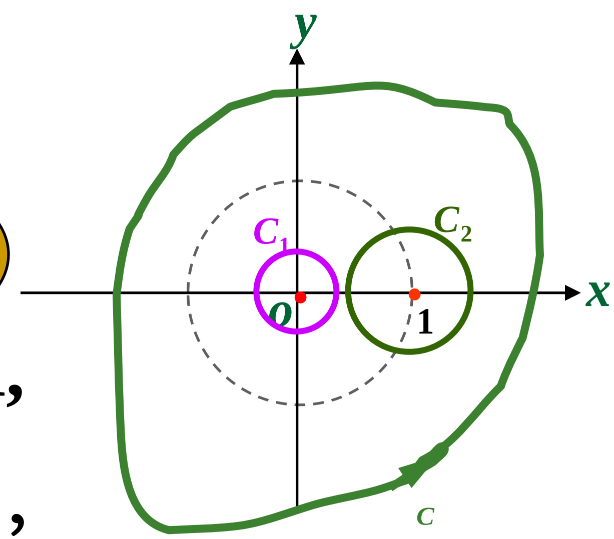
$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

其中C及C_k均取正方向;



这个定理是计算周线内部有奇点的积分的有利武器!!!

例4 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$, C为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.



解 因为函 …

打洞!

内有两 … $z=1$,

依题意知, C也包含这两个奇点,

在C内作两个互不包含也互不相交的圆周C_1和C_2,

C_1只包含奇点$z=0$, C_2只包含奇点$z=1$,

则:$C+C_1^-+C_2^-$构成复周线

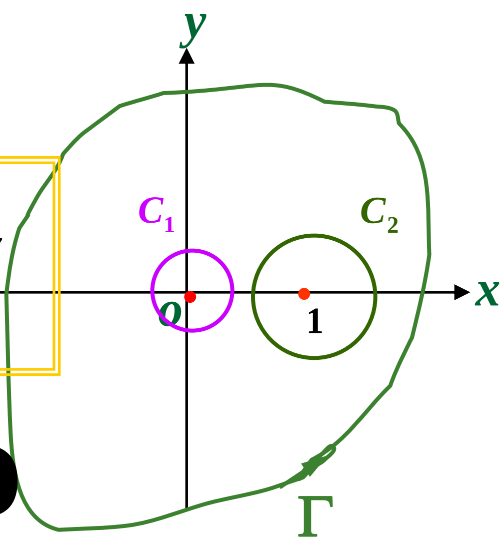
根据复合闭路定理3.10,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz$$

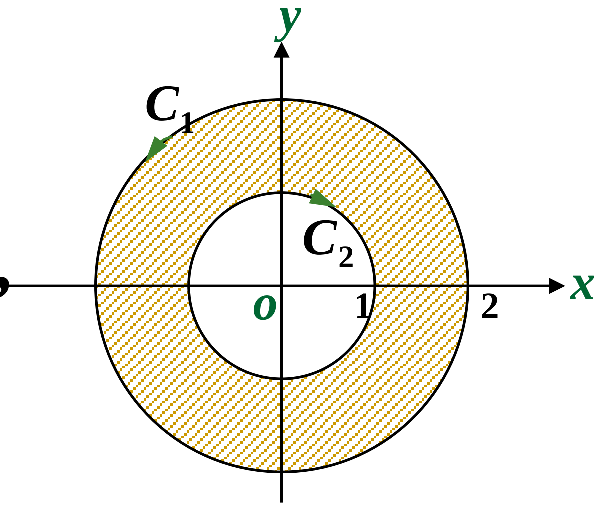
$$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0$$

Cauchy 定理 | 重要公式 | 重要公式 | Cauchy 定理



$$= 4\pi i.$$

例5 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$,Γ 为正向圆周 $|z|=2$ 和负向圆周 $|z|=1$ 所组成.

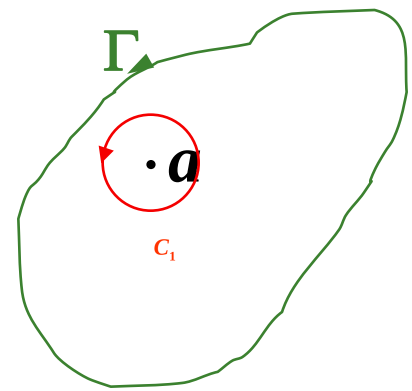


解 C_1 和 C_2 围成一个圆环域,

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在此圆环域和其边界上处处解析, 圆环域的边界构成一条复合闭路,

根据闭路复合定理, $\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=0.$

例6 求 $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} \mathrm{d}z$，$C$为含 a 的任一简单闭路，n 为整数.



解 因为a在曲线Γ内部，

故可取很小的正数ρ，

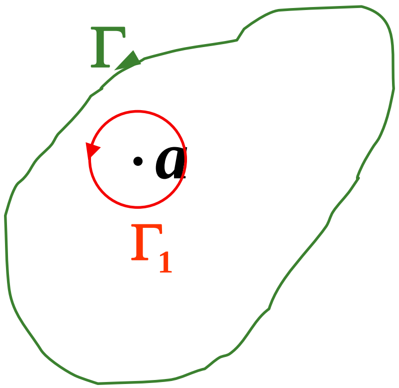
使 $C_1: |z-a| = \rho$ 含在 Γ 内部，

$\frac{1}{(z-a)^n}$在以 $C + C_1^-$ 为边界的复连通域

内处处解析，

由复合闭路定理,

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$



故 $$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

重要积分公式
例3.2

此结论非常重要, 用起来很方便, 因为C不必是圆, a也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线C内即可.

例7 求 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\dfrac{1}{(z-z_0)^n}dz$，$\Gamma$为含 z_0 的任意正向闭曲线，n 为自然数.

解 由上例可知
$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$$

此处不妨设 $a=z_0$，

则有
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

3.4原函数与不定积分

1. 带活动上限的积分:

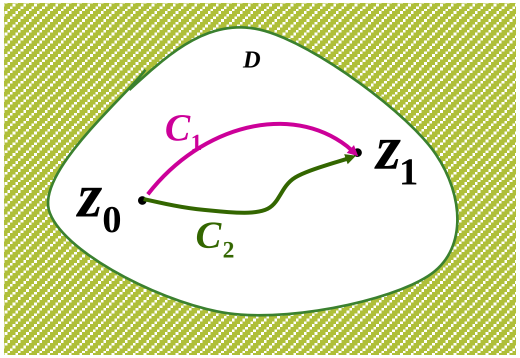
定理3.5

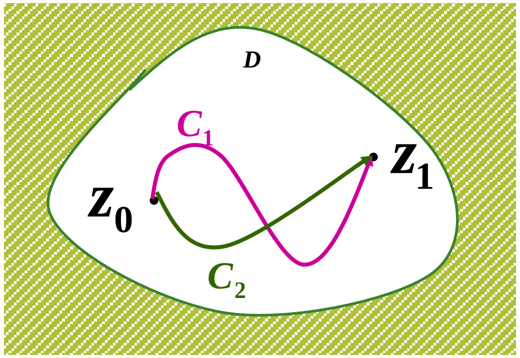
如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 那末积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

由定理3.5可知:

解析函数在单连通域内的积分只与起点和终点有关, (如下页图)

如果起点为z_0，终点为z_1，





$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$

如果固定z_0，让z_1在D内变动，并令$z_1 = z$，

便可确定D内的一个单值函数$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

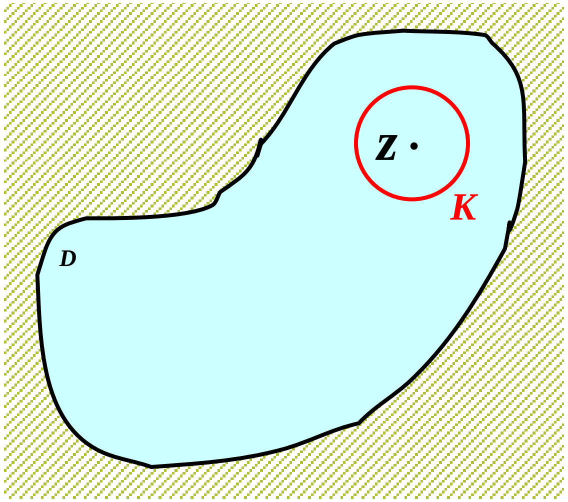
定理3.6

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析，那末函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 D 内的一个解析函数，并且 $F'(z)=f(z)$.

证 利用导数的定义来证.

设 z 为 D 内任一点，

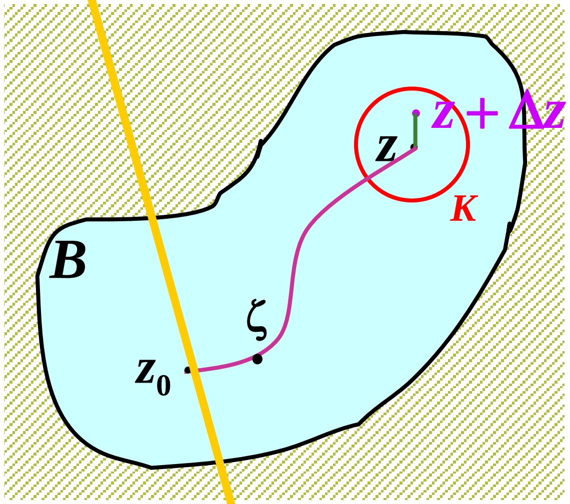
以 z 为中心作一含于 D 内的小圆 K,



取 $|\Delta z|$ 充分小使 $z+\Delta z$ 在 K 内,

由 $F(z)$ 的定义,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$



(1) 由于积分与路线无关,

$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路线可先取 z_0到 z

(注意:这一段与 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的路线相同) 然后从 z 沿直线到 $z+\Delta z$,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$F(z+\Delta z)-F(z)=$$

$$=\boxed{\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}+\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\boxed{\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}$$

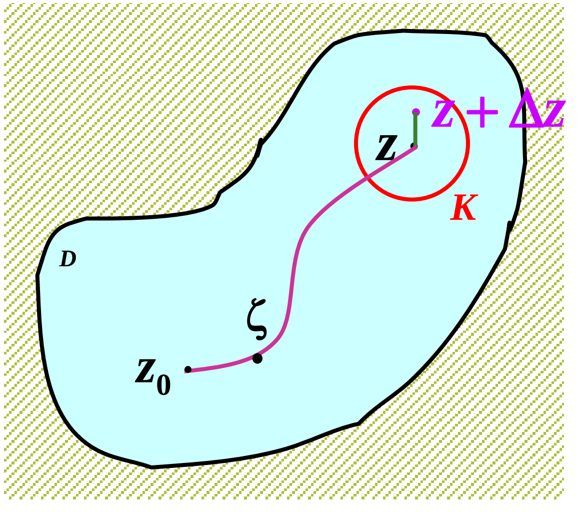
于是 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$

因为 $\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z,$

所以 $\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta$$



因为 $f(z)$ 在 D 内解析，

$\Rightarrow$ (2) $f(z)$ 在 D内连续，

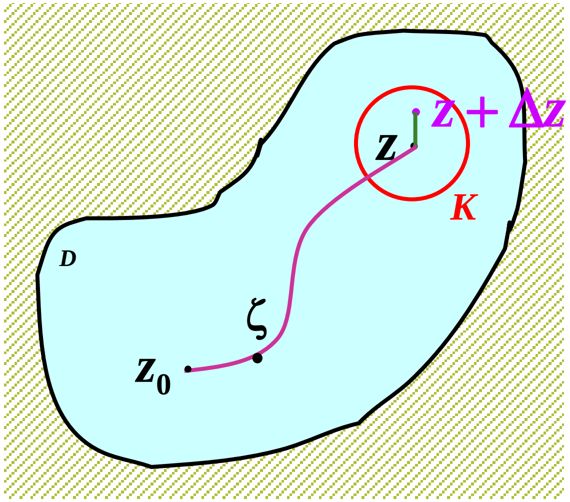
故 $\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta > 0$，

使得满足 $|\zeta - z| < \delta$ 的一切 ζ 都在 K 内，

即 $|\Delta z| < \delta$时， 总有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$，

由积分的估值性质，

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$



$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}\zeta\le\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0,$

即 $F'(z)=f(z).$ [证毕]

此定理与微积分学中的对变上限积分的求导定理完全类似.

由于在证明过程中只用到了两个结论:

(1) 积分与路线无关,

(2) $f(z)$ 在 D内连续,

定理3.6可以改写为:

定理3.7 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内满足:

(1) $f(z)$在D内的积分与路线无关,

(2) 所以 $f(z)$ 在 D内连续,

那末函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为D 内的一个解析函数, 并且 $F'(z)=f(z)$.

2. 原函数的定义:

如果函数 $\Phi(z)$ 在区域 D 内的导数为 $f(z)$, 即 $\Phi'(z)=f(z)$, 那末称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

显然 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系:

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

证　设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是 $f(z)$ 的任何两个原函数,

那末 $[G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)$

$$=f(z)-f(z)\equiv 0$$

于是 $G(z)-H(z)=c$. (c 为任意常数)　　[证毕]

根据以上讨论可知:

如果 $f(z)$ 在区域 D 内有一个原函数 $F(z)$,

那末它就有无穷多个原函数,

其全体原函数可表示为: $F(z)+c$ (c 为任意常数).

3. 不定积分的定义:

称 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c 为任意常数)为 $f(z)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c.$$

定理3.8 (复积分的Newton-Leibnitz公式)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z_1)-\Phi(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 F 内的两点.

证 因为$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也是$f(z)$的原函数,

所以$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z) + C$,

当$z = z_0$时, 根据柯西基本定理,

得 $C = -\Phi(z_0)$,

所以$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z) - \Phi(z_0)$,

或 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$. [证毕]

说明: 有了以上定理, 复变函数的积分就可以用跟微积分学中类似的方法去计算.

例8　求 $\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z$ 的值.

解　因为 z 是解析函数，它的原函数是 $\frac{1}{2}z^2$,

$$\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

由牛顿-莱布尼兹公式知,

例9　求 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2\mathrm{d}z$ 的值.

解

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i}\cos z^2\mathrm{d}z^2$$

使用“凑微分”

$$= \frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

例10 求$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z$的值.

解 因为$z\cos z$是解析函数,

它的一个原函数是 $z\sin z+\cos z$,

由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z=[z\sin z+\cos z]_0^i$$

$$=i\sin i+\cos i-1$$

$$=i\frac{e^{-1}-e}{2i}+\frac{e^{-1}+e}{2}-1=e^{-1}-1.$$

例10 求$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z$的值.

另解 $$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z=\int_0^i z\mathrm{d}(\sin z)$$

$$=[z\sin z]_0^i-\int_0^i \sin z\mathrm{d}z$$

$$=[z\sin z+\cos z]_0^i=e^{-1}-1.$$

使用:“分部积分法”

例11　求 $\int_1^{1+i} ze^z \mathrm{d}z$ 的值.

解　利用分部积分法可得

ze^z 的一个原函数为 $(z-1)e^z$,

$$\int_1^{1+i} ze^z \mathrm{d}z = (z-1)e^z\Big|_1^{1+i} = ie^{1+i} = ie(\cos 1 + i\sin 1).$$

课堂练习　求 $\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z$ 的值.

答案　$\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z = \sin 1 + \cos 1.$

例12 试沿区域 $\operatorname{Im}(z) \geq 0, \operatorname{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$,

求 $\displaystyle\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z$ 的值.

解 函数 $\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析,

它的一个原函数为 $\dfrac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z = \left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i = \frac{1}{2}[\ln^2(1+i) - \ln^2 2]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8}i.$$

例13 求 $\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z$ 的值. 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线：$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$.

解 因为函数 $2z^2+8z+1$ 在复平面内处处解析,

所以积分与路线无关，根据N-L公式:

$$\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right]_0^{2\pi a}=\frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.$$

2.3.5 小结与思考

1. 通过本课学习, 重点掌握柯西—古萨基本定理:

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 那末函数 $f(z)$ 沿 D 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零: $\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

并注意定理成立的条件.

2.本课所讲述的复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论: $$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

3.本课介绍了原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式. 在学习中应注意与《高等数学》中相关内容相结合, 更好的理解本课内容.

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \qquad \int f(z)\mathrm{d}z=F(z)+c$$

$$\int_{z_0}^{z_1}f(z)\mathrm{d}z=G(z_1)-G(z_0)$$

思考题:

1. 应用柯西–古萨定理应注意什么?

答案:

(1) 注意定理的条件"单连通域".

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域 $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内;

(2) 注意定理的不能反过来用.

即由 $\oint_C f(z)dz=0 \not\Rightarrow f(z)$ 在 C 内处处解析.

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内.

2.复合闭路定理在积分计算中有什么用? 要注意什么问题?

答案 利用复合闭路定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法.

使用复合闭路定理时, 要注意曲线的方向.

3. 解析函数在单连通域内积分的牛顿–莱布尼兹公式与实函数定积分的牛顿–莱布尼兹公式有何异同?

答案

两者的提法和结果是类似的.

但在复积分中要求 $f(z)$ 为单连通域中的解析函数, 且积分路线是曲线 C, 因而 z_0, z 都是复数;

在实积分中要求 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续实函数, a, x 都是实数.

两者对函数的要求差异很大.

柯西积分公式及其推论

1 第三节 柯西积分公式

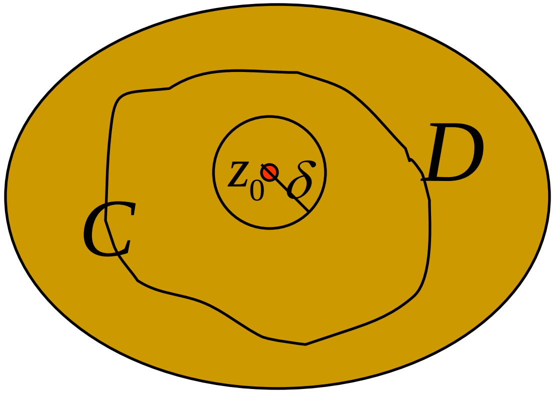
2 解析函数的无穷可微性

3 柯西不等式与刘维尔定理

4 莫勒拉定理

§ 3.5柯西积分公式

分析：设 $z_0 \in D$, 若 $f(z)$ 在D内解析，则



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \underline{\underline{\text{闭路变形原理}}} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$\xrightarrow{f(z)\to f(z_0)(\delta\to 0)} f(z_0)\oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$$

.**定理** (柯西积分公式) 如果 $f(z)$在区域D内处处解析, C为D内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于D, z_0为C内的任一点, 则

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.}$$

$$\boxed{\left(or \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \right)}$$

---解析函数可用复积分表示。

它表明：对于解析函数，只要知道了它在区域边界上的值，那么通过上述积分公式，区域内部点上的值就完全确定了.

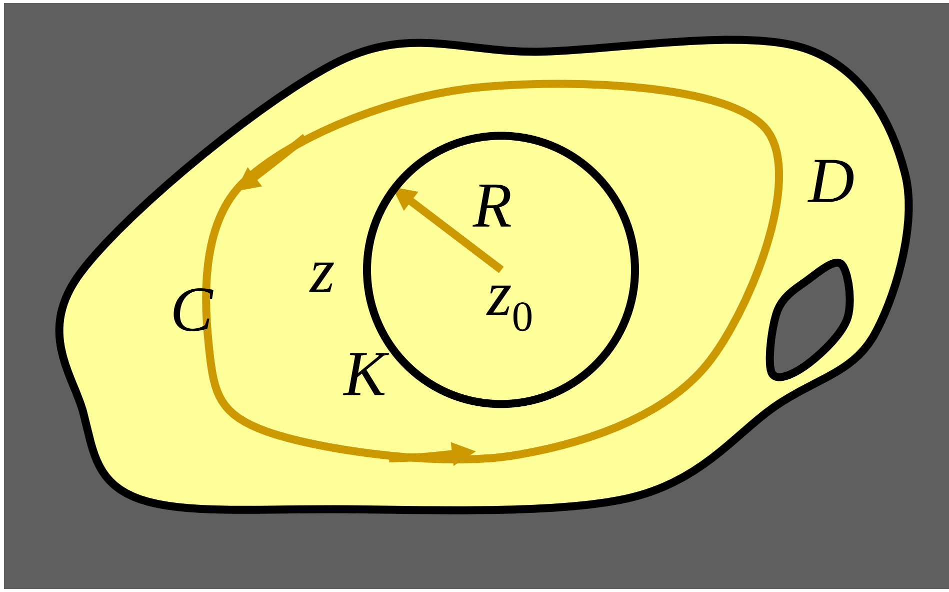
特别地，从这里我们可以得到这样一个重要的结论：如果两个解析函数在区域的边界上处处相等，则它们在整个区域上也相等.

[证] 由于$f(z)$在 z_0连续, 任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 当 $|z-z_0|<\delta$时, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 设以 z_0为中心, R 为半径的圆周K: $|z-z_0|=R$全部在C的内部, 且$R<\delta$.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i f(z_0)+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$



$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0)\right|=\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right|$$

$$<\oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{R}\oint_K \mathrm{d}s=2\pi\varepsilon.$$

根据闭路变形原理, 该积分的值与R无关, 所以只有在对所有的R 积分为值为零才有可能。

推论1 如果C是圆周$z=z_0+Re^{i\theta}$, 则柯西积分公式成为

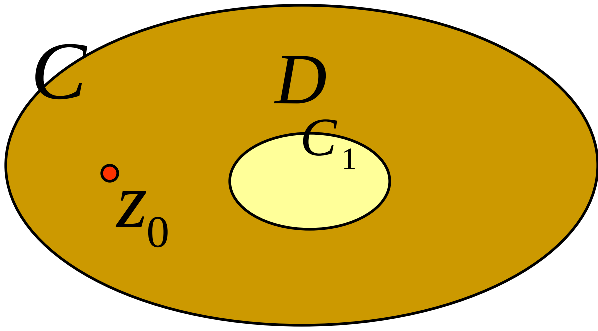
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})}{R\mathrm{e}^{i\theta}}iR\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$=f\left(z_0+\mathrm{Re}^{i\xi}\right)$$

------ 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

推论2 设 $f(z)$在二连域 D内解析，在边界上连续，则

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz-\oint_{C_1}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz \qquad \forall z_0\in D.$$



选择题：设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内任一条正向简单闭曲线，它的内部全属于 D．如果 $f(z)$ 在 C 上的值为 2，那么对 C 内任一点 $z_0, f(z_0)$ （　　）．

(A) 等于 0　　(B) 等于 1

(C) 等于 2　　(D) 不能确定

例　求下列积分的值

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z+i}\,dz,\qquad C:|z+i|=1;$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(5-z^2)(z-i)}\,dz$$

解：（1）原式$=2\pi i e^{iz}|_{z=-i}=2\pi e i$

（2）原式$=\int_{|\xi|=2}\frac{\frac{z}{5-z^2}}{z-i}dz=2\pi i\frac{z}{5-z^2}|_{z=i}=-\frac{1}{3}\pi$

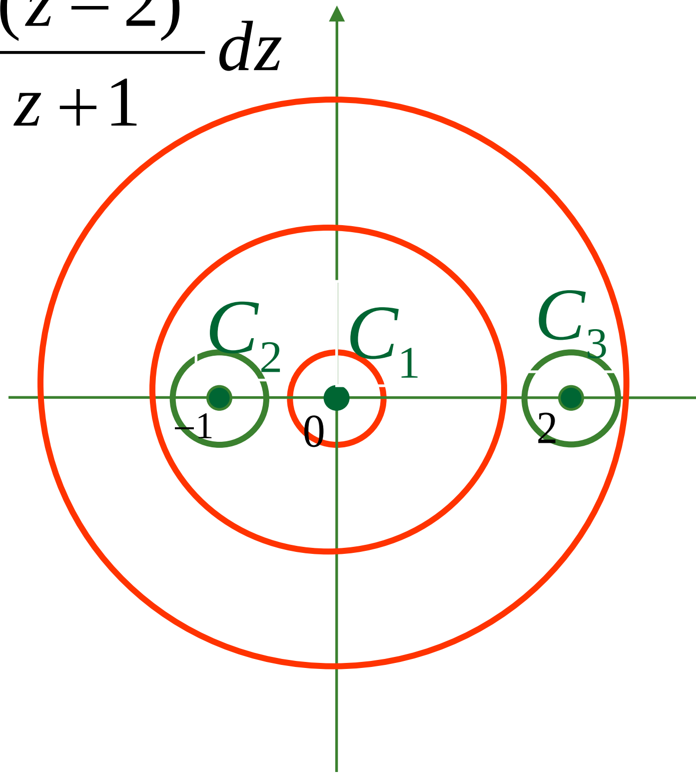
例1　　计算积分 $I=\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)(z-2)}dz \quad C:|z|=r\,(r\neq 1,2)$

解：$0<r<1,\quad I=\oint_C \frac{\frac{e^z}{(z+1)(z-2)}}{z}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{(z+1)(z-2)}\right|_{z=0}=-\pi i$

$1<r<2,\quad I=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}=-\pi i+\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z(z-2)}}{z+1}dz$

$=-\pi i+2\pi i\left.\frac{e^z}{z(z-2)}\right|_{z=-1}=-\pi i+\frac{2\pi}{3e}i$

$r>2,\ I=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}+\oint_{C_3}$



$$= -\pi i + \frac{2\pi}{3e} i + \oint_{C_3} \frac{\frac{e^z}{z(z+1)}}{z-2} dz = -\pi i + \frac{2\pi}{3e} i + 2\pi i \left. \frac{e^z}{z(z+1)} \right|_{z=2}$$

$$= -\pi i + \frac{2\pi}{3e} i + \frac{e^2 \pi}{3} i$$

例：计算积分$\int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$，其中$C$为一条围线，讨论之.

解①若 C 不含 z=±1， 则 $\int_c \frac{\sin\frac{\pi}{4}zdz}{z^2-1}=0$

②若 C 含 z=1 但不含有 z=−1, 则

$$\int_c \frac{\sin\frac{\pi}{4}zdz}{z^2-1}=2\pi i\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

③若 C 含有 z=−1, 但不含 z=1, 则:

$$\int_c \frac{\sin\frac{\pi}{4}zdz}{z^2-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

④若 C 含有 $z=\pm1$, 则:

$$\int_c \frac{\sin\frac{\pi}{4}zdz}{z^2-1}=\int_c \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}z\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz=\frac{2\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\pi i$$

设 $g(z)=\int_{|\xi|=2}\frac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-2}d\xi$ 。

（1）求 $g(1)$；

（2）求 $g(z_0),|z_0|>2$；

（3）能否求出 $g(2)$？

解：（1）$g(z)=\int_{|\xi|=2}\frac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-2}d\xi=2\pi i(2\xi^2-\xi+1)|_{\xi=1}=4\pi i$

（2）$F(\xi)=\frac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-z_0}$ 在 $|\xi|\leq 2$ 内解析，故有柯西积分定理知

$$g(z_0)=\int_{|\xi|=2}\frac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-z_0}d\xi=0$$

（3）因被积函数对积分 $\int_{|\xi|=2}\frac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-2}d\xi$ 来说，分子在 $\xi=2$ 时不为零，分母为零，而 $\xi=2$ 又在积分路径上，因此该积分无意义，所以不能求出 $g(2)$

§ 3.6 解析函数的高阶导数

一个解析函数不仅有一阶导数，　而且有各高阶导数，它的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示．这一点和实变函数完全不同．一个实变函数在某一区间上可导，它的导数在这区间上是否连续也不一定，更不要说它有高阶导数存在了．

关于解析函数的高阶导数我们有下面定理:

定理 解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数, 它的n阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad (n=1,2,\cdots)$$

其中C为在函数$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任何一条正向简单曲线, 而且它的内部全含于D.

[证] 设z_0为D内任意一点, 先证n=1的情形, 即

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$$ 按定义 $$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z},$$

因此就是要证

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z-\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$ 在$\Delta z\to 0$时也趋向于零.

按柯西积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \quad f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0+\Delta z}\mathrm{d}z$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}\mathrm{d}z$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z-\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

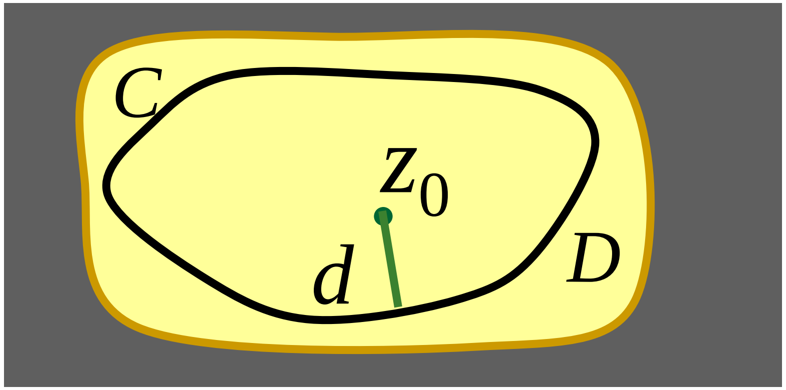
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\mathrm{d}z=I$$

现要证当$\Delta z\to 0$时$I\to 0$, 而

$$|I|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(z)|\,\mathrm{d}s}{|z-z_0|^2|z-z_0-\Delta z|}$$

$f(z)$在C上连续, 则有界, 设界为M, 则在C上有$|f(z)|\le M$. d 为 z_0到C上各点的最短距离, 则取 $|\Delta z|$ 适当地小使其满足 $|\Delta z|<d/2$,因此



$$|z-z_0|\ge d,\quad \frac{1}{|z-z_0|}\le\frac{1}{d},$$

$$|z-z_0-\Delta z|\ge|z-z_0|-|\Delta z|>\frac{d}{2},$$

$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|}<\frac{2}{d},\qquad |I|\le\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(z)|\,\mathrm{d}s}{|z-z_0|^2|z-z_0-\Delta z|}<|\Delta z|\frac{ML}{\pi d^3}$$

这就证得了当 $\Delta z\to 0$时, $I\to 0$.

这就证得了 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$

再利用同样的方法去求极限: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z}$

便可得 $f''(z_0)=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z$

依此类推, 用数学归纳法可以证明:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \ (f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta)$$

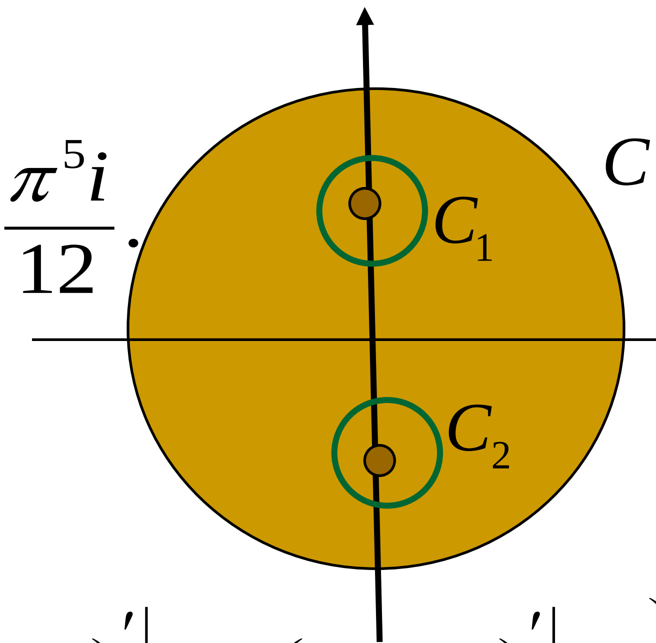
高阶导数公式的作用, 不在于通过积分来求导, 而在于通过求导来求积分.

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)}$$

例1 求下列积分的值, 其中C为正向圆周: $|z|=r>1$.

$$1)\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z;\qquad 2)\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

[解] 1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在C内的$z=1$处不解析, 但$\cos\pi z$在C内却是处处解析的.



$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$

$$2)\ \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz = 2\pi i\left(\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i} + \left(\frac{e^z}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i}\right)$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin(1-\frac{\pi}{4})$$

1. 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内解析，在 C 上连续， z_0 在 C 内，则有________.

A. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = f'(z_0)\oint_C \frac{1}{(z-z_0)}dz$ B. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz$;

C. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{f(z_0)}{2!}\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz$ D. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz$

2. 设 C 为不经过点与-1 的正向简单闭曲线，则 $\oint_c \frac{zdz}{(z-1)(z+1)^2}$ 为

(　　).

(A) $\frac{\pi \cdot i}{2}$　(B) $\frac{-\pi \cdot i}{2}$　(C) 0　(D) (A) (B) (C) 都有可能

A, D

例：设：$f(z)=\oint_{|\xi|=5}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，

求 $f'(z)|_{z=-1+i}$

解:

$$f(z)=\oint_{|\xi|=5}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$$

$$=2\pi i(3\xi^2+7\xi+1)|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1)$$

故:

$$f'(z)=2\pi i(6z+7)$$

$$f'(z)|_{z=-1+i}=-12\pi+2\pi i$$

例：设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在闭圆 $|z|\le 1$ 上连续，有 $f(0)=1$，求积分：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{2z}$.

解: $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}$

$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}\pm f(z)\pm\frac{f(z)}{z^2}]dz$

$=2f(0)\pm f'(0)=2\pm f'(0)$

例6 如果$|z|<1$内$f(z)$解析且$|f(z)|\leq\dfrac{1}{1-|z|}$，证明

$$\left|f^{(n)}(0)\right|\leq(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e(n+1)!\quad(n=1,2,\cdots)$$

证 因为$f^{(n)}(0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\quad 0<r<1,$

所以$\left|f^{(n)}(0)\right|\leq\dfrac{n!}{2\pi}\displaystyle\oint_{|z|=r}\dfrac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z|\leq\dfrac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=r}\dfrac{1}{(1-|z|)|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z|$

$=\dfrac{n!}{(1-r)r^{n}}$， 取$r=\dfrac{n}{n+1}$， 不等式即证.

3 柯西不等式与刘维尔定理:

定理4.3 设函数$f(z)$在以

$$C:|z-z_0|=\rho_0 (0<\rho_0<+\infty)$$

为边界的闭圆盘上解析，那么

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}\le\frac{M(\rho)}{\rho^n}(n=0,1,2,\ldots;0!=1)$$

其中

$$M(\rho)=\max_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|(0<\rho\le\rho_0).$$

定理4.3的证明:

证明：令 C_ρ

是圆 $|z-z_0|=\rho(0<\rho\le\rho_0)$

那么，由导数公式，有

$$|f^{(n)}(z)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho=n!\cdot\frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}}$$

其中，n=0, 1, 2, …; 0!=1。

注解:

注解1、上面的不等式称为柯西不等式。
注解2、如果在C上解析，那么我们称它为一个整函数，例如

$$\sin z, \cos z, e^z$$

等。关于整函数，我们有下面重要的刘维尔定理

刘维尔定理：

定理4.4： 有界整函数一定恒等常数

证明：$f(z)$是有界整函数，即存在$M\in(0,+\infty)$,

使得

$$\forall z\in \mathrm{C}, |f(z)|<M.$$

$$\forall z_0\in \mathrm{C}, \forall\rho\in(0,+\infty)$$

$f(z)$在上 $\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$

解析。由柯西公式，有 $|f'(z_0)|\le M/\rho$

令$\rho\to+\infty$ ，可见 $\forall z_0\in \mathrm{C}, f'(z_0)=0$

从而$f(z)$在C上恒等于常数。

4 莫勒拉定理:

莫勒拉定理: 应用解析函数有任意阶导数,可以证明柯西定理的逆定理,

定理5.1 如果函数$f(z)$在区域D内连续，并且对于D内的任一条简单闭曲线C，我们有

$$\int_C f(z)dz = 0$$

那么$f(z)$在区域D内解析。

莫勒拉定理:

证明：$\forall z_0 \in \mathbb{C}$,

作以z_0为心的圆盘 $K \subset D$.

在凸区域K内，函数$f(z)$连续，并且对于K内任何一个三角形的周界C，则可以证明$f(z)$在K内有原函数$F(z)$，即

$$\exists F'(z) = f(z)$$

于是$F(z)$在K内解析。由系4.1，$f(z)$在K内，在z_0解析，从而有任意阶导数。又因为z_0的任意性，结论成立。

例：计算$\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz$的值，$\Gamma$为包含圆周$|z|=1$的任何正向简单闭曲线.

解：$\frac{2z-1}{z^2-z}$在复平面内除$z=0$和$z=1$外处处解析

而Γ包含了这两个奇点在Γ内作两个互不包含也互不相交的正向圆周c_1, c_2. c_1只含奇点$z=0$, c_2只含奇点$z=1$, 则$\oint_c \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{c_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{c_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$

$$= \oint_{c_1} \left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz + \oint_{c_2} \left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz = \oint_{c_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{c_1} \frac{1}{z}dz +$$

$$\oint_{c_2} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{c_2} \frac{1}{z}dz = 0 + 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

代数基本定理 在z平面上，n次多项式 $p(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$（$a_n\neq 0$）至少有一个零点.

证明：（反证法）假设 $p(z)$ 在z平面上无零点，由于 $p(z)$ 在平面上解析，从

而 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在z平面上也是解析的．其次，由于

$$\lim_{z\to\infty}p(z)=\lim_{z\to\infty}z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right)=\infty$$

所以 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=0$

于是 $\exists R>0$，使得 $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|<1$，$|z|>R$ 又因为 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在 $|z|\le R$ 上连续，故 $\exists M>0$，

使得 $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|\le M(|z|\le R)$ 从而在z平面上有 $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|<M+1$

即 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在z平面上解析且有界，因此根据刘维尔定理，$\dfrac{1}{p(z)}$ 为常数，故

$p(z)$ 亦为常数，与已知 $p(z)$ 为多项式矛盾，定理得证.

关于代数基本定理

- 该定理至今为止，尚无纯代数方法的证明。其第一个证明是法国数学家达朗贝尔给出的，但证明不完整；接着欧拉也给出了一个证明，但也有小问题；拉格朗日于1772年又重新证明了该定理，后经高斯分析，证明仍不严格。
- 该定理的第一个严格证明通常认为是高斯在1799年其博士论文中给出的。
- 该定理至今有200多种证法。