第五章 一阶电路与二阶电路

山东大学信息科学与工程学院

一阶电路

- 内容提要：
  - 一阶电路的零输入响应
  - 一阶电路的零状态响应
  - 一阶电路的全响应
  - 一阶电路的“三要素法”
  - 一阶电路的阶跃响应
  - 一阶电路的冲激响应
  - 二阶动态电路的时域分析
  - RLC二阶电路的零输入响应
  - RLC二阶电路的冲激响应

要领：
通过对一阶电路各种响应信号的分析，掌握其内在规律，最终摆脱微分方程的建立与求解。
重点：“三要素法”

5-1 一阶电路及其特征

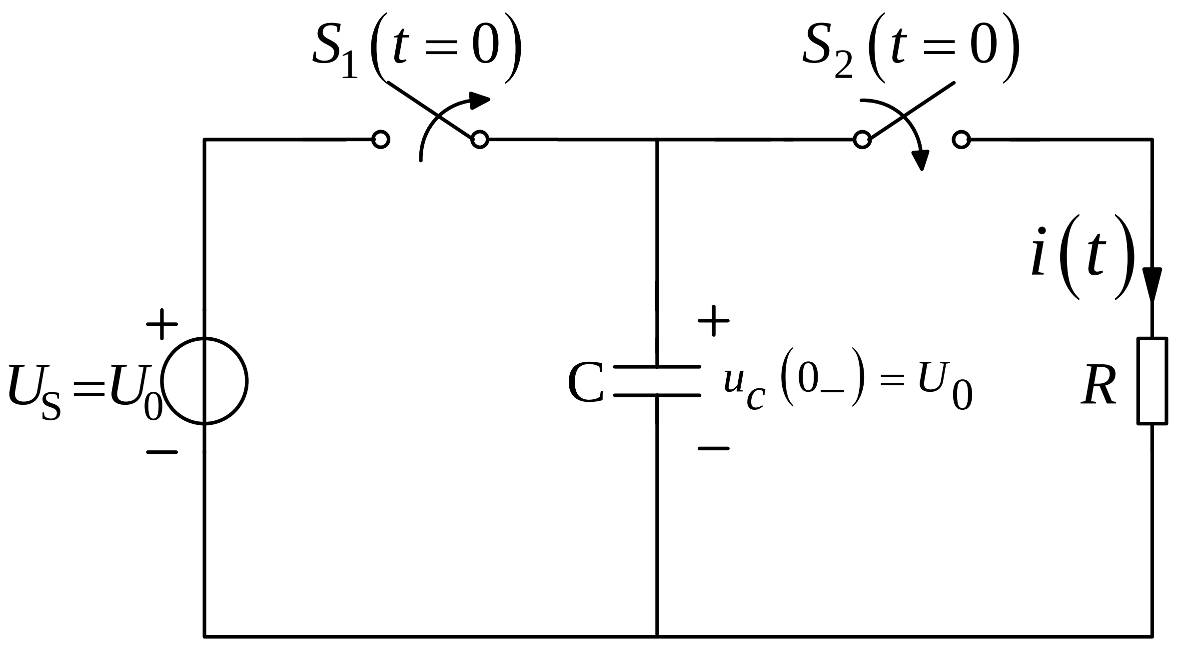
- 一阶电路：
  - 电路中仅包含一个独立的动态元件
  - 输入-输出方程表现为一阶微分方程
- 典型一阶电路：
  - RC电路：由激励源、电阻元件与电容元件组成。
  - RL电路：由激励源、电阻元件与电感元件组成。

5-2 一阶电路的零输入响应

- 零输入响应：
  - 无外部激励，仅在动态元件的原始储能驱动的响应信号。输入-输出方程为一阶齐次微分方程。
- 典型一阶电路：
  - RC电路：由电阻元件与电容元件组成。
  - RL电路：由电阻元件与电感元件组成。

5-2-1 RC电路的零输入响应

- 电路模型
- 待分析量：换路后$u_c(t)$、$i(t)$及其变化规律



5-2-1 RC电路的零输入响应

- 原始状态： $u_C(0_-)=U_0$
- 初始状态： $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$
- 根据选定的电容电压和电流参考方向

$$i(t)=-C\frac{du_C(t)}{dt}$$

- 根据KVL列出电路方程（输入-输出方程）

$$RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=0$$

- 特征方程及特征根

$$RCs+1=0 \quad \Rightarrow \quad s=-\frac{1}{RC}$$

5-2-1 RC电路的零输入响应

- 齐次微分方程的通解： $u_C(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$
- 根据初始条件得常数*A*：

$$u_C(0_+) = Ae^{-\frac{0}{RC}} = A = U_0$$

- 电容上的零输入响应电压

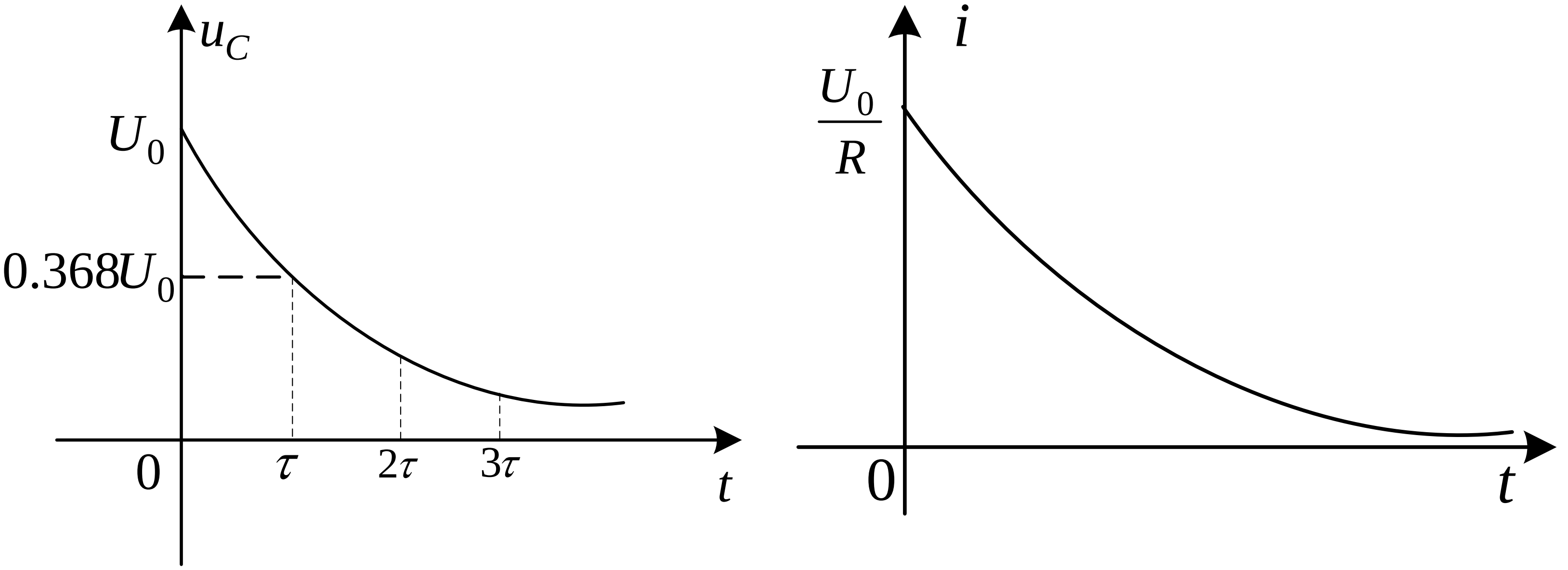
$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad ,t \geq 0_+ \quad \Longleftrightarrow \quad u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

- 零输入响应电流〔即放电电流〕

$$i(t) = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad ,t \geq 0_+ \quad \Longleftrightarrow \quad i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

RC电路零输入响应曲线

- 物理意义：
  - 电容元件储存的电荷通过电阻放电，原始储能被电阻消耗，电容电压和放电电流以指数规律下降，直至归零，能量全部被耗尽。



RC电路时间常数 τ

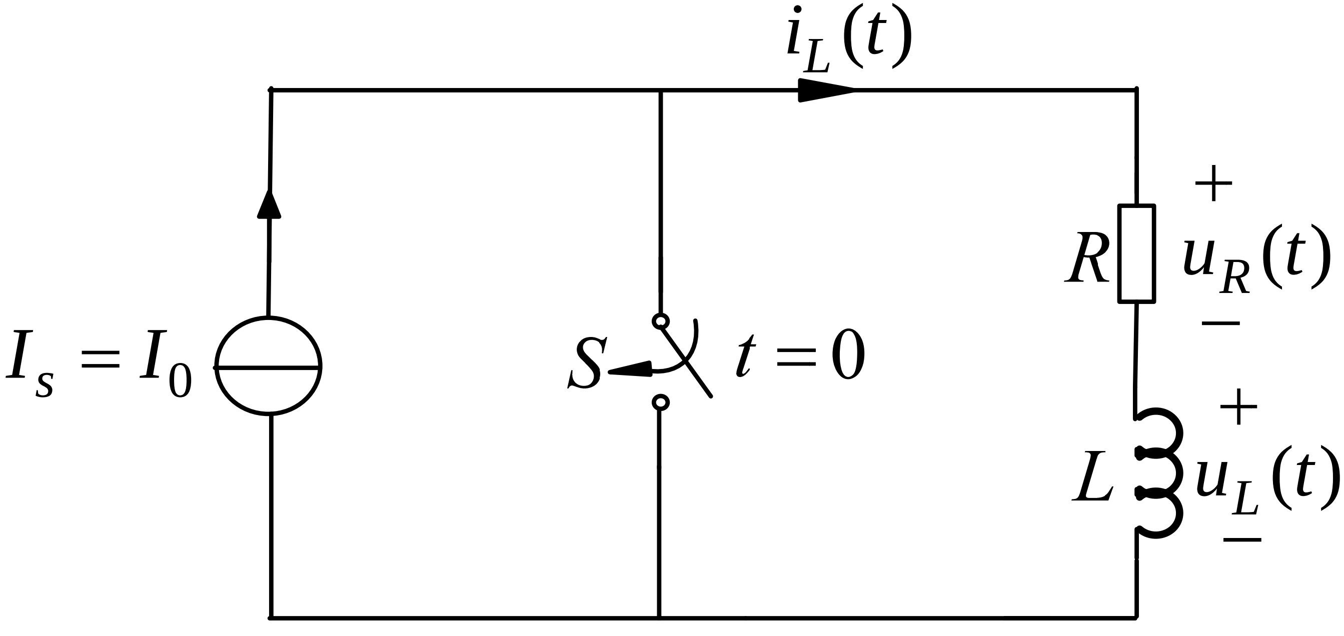
- RC电路的时间常数： $\tau = RC$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ,t \geq 0_+$$

  - RC电路的放电速度取决于时间常数 τ
  - 时间常数 τ 愈小，放电愈快；反之，则愈慢
  - 一般经过4 τ~5 τ 后，电容放电过程基本结束。
  - 时间常数 τ 与电容值C和电阻值R成正比关系。
    - 电容C越大，电容储存电荷越多，放电时间越长
    - 电阻R越大，放电电流越小，放电时间越长

5-2-2 RL电路的零输入响应

- 电路模型
- 待分析量：$i_L(t)$、$u_R(t)$、$u_L(t)$



5-2-2 RL电路的零输入响应

- 原始/初始状态：

$$i_L(0_-) = I_0 \Rightarrow i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$$

- 根据KVL列出电路方程(输入-输出方程)

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) = 0$$

- 特征方程与特征根

$$Ls + R = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{LG}$$

- 微分方程通解

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

5-2-2 RL电路的零输入响应

- 根据初始条件确定常数*A*：　$i_L(0_+) = Ae^{-\frac{R}{L}0} = A = I_0$
- 零输入响应电流

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad ,t \geq 0_+ \quad \Longleftrightarrow \quad i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

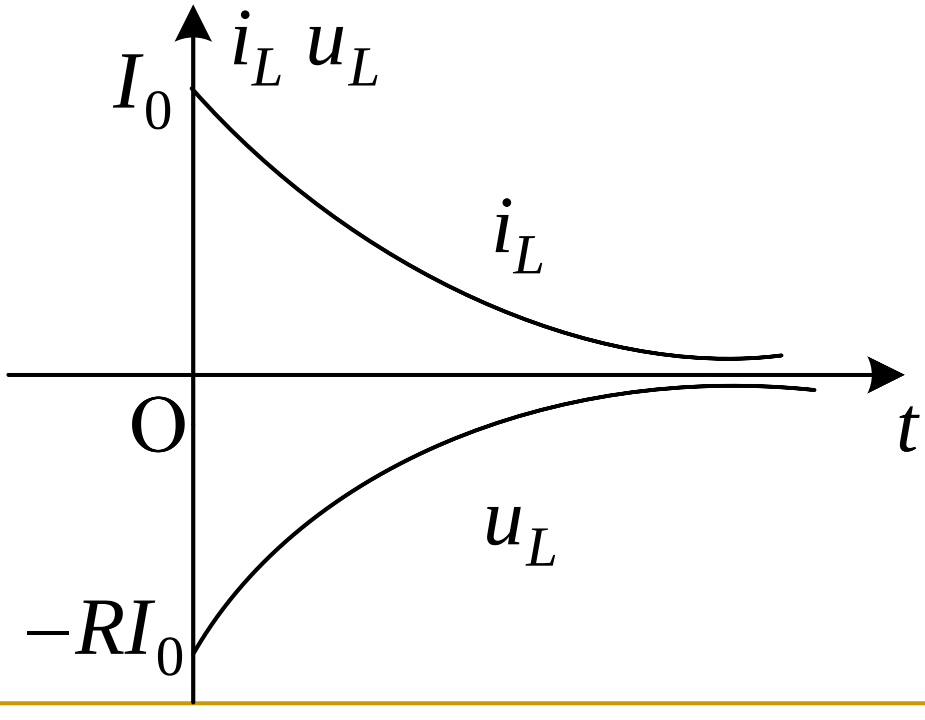
- 零输入响应电压

$$u_R(t) = Ri_L(t) = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$u_L(t) = -u_R(t) = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(\mathrm{t})$$

RL电路零输入响应曲线

- 物理意义：电感元件的原始储能（磁场能量）通过电阻释放，直至原始储能全部被电阻消耗。



RL电路时间常数

- RL电路的时间常数： $\tau = \dfrac{L}{R} = LG$
  - RL电路的放电速度取决于时间常数 τ
  - 时间常数 τ 愈小，放电愈快；反之，则愈慢
  - 一般经过4 τ~5 τ 后，电感放电基本结束。
  - 时间常数 τ 与电感值L和电导值1/R成正比关系。
    - 电感L越大，储存磁场能量越多，放电时间越长
    - 电导1/R越大，耗能越少，放电时间越长

5-2-3 一阶电路零输入响应的简化分析

- **一阶电路的零输入响应具有统一的形式：**

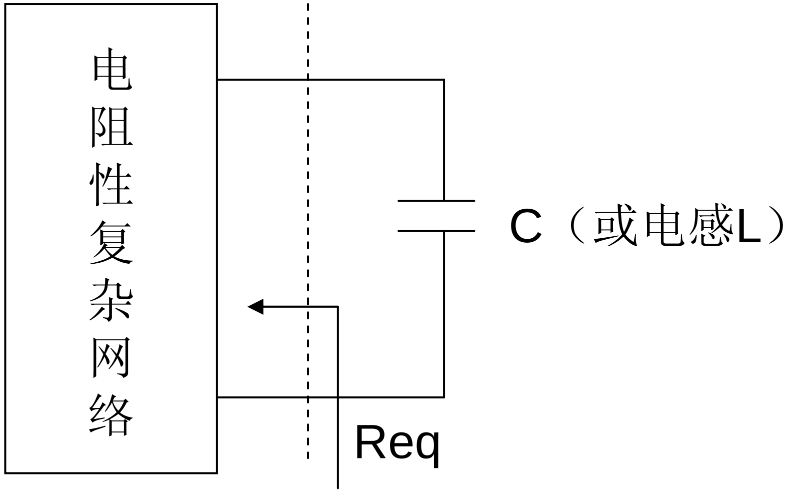
$$\text{零输入响应} = \text{初始值} \times e^{-\frac{t}{\tau}} \times \varepsilon(t)$$

  - 只要求出输出变量的初始值和电路的时间常数τ，就可直接写出零输入响应。
- 零输入响应都是电路**初始状态的线性函数**，满足齐次性与可加性。
- RC电路与RL电路时间常数的**对偶性**：**电容C与电感L对偶**，**电阻R与电导G对偶**。

$$\tau = RC \qquad\qquad \tau = \frac{L}{R} = LG$$

复杂一阶电路零输入响应分析

- **含有“一个”独立动态元件和“若干个”电阻元件的一阶电路零输入响应分析方法：**
  - 将所有电阻元件等效为一个与动态元件（电容或电感）并联的电阻元件，**<u>根据等效电阻和动态元件参数（C或L）计算时间常数 τ</u>**。
  - 根据响应信号**初值**和**时间常数**写出零输入响应。



注：

1. 等效电阻Req的求法同戴维宁定理中使用的方法。
2. 电路时间常数求法：

$$\tau = R_{eq}C \text{ 或 } L/R_{eq}$$

例题分析

- 例题4-1-1：求 $i(t)$，$u_o(t)$

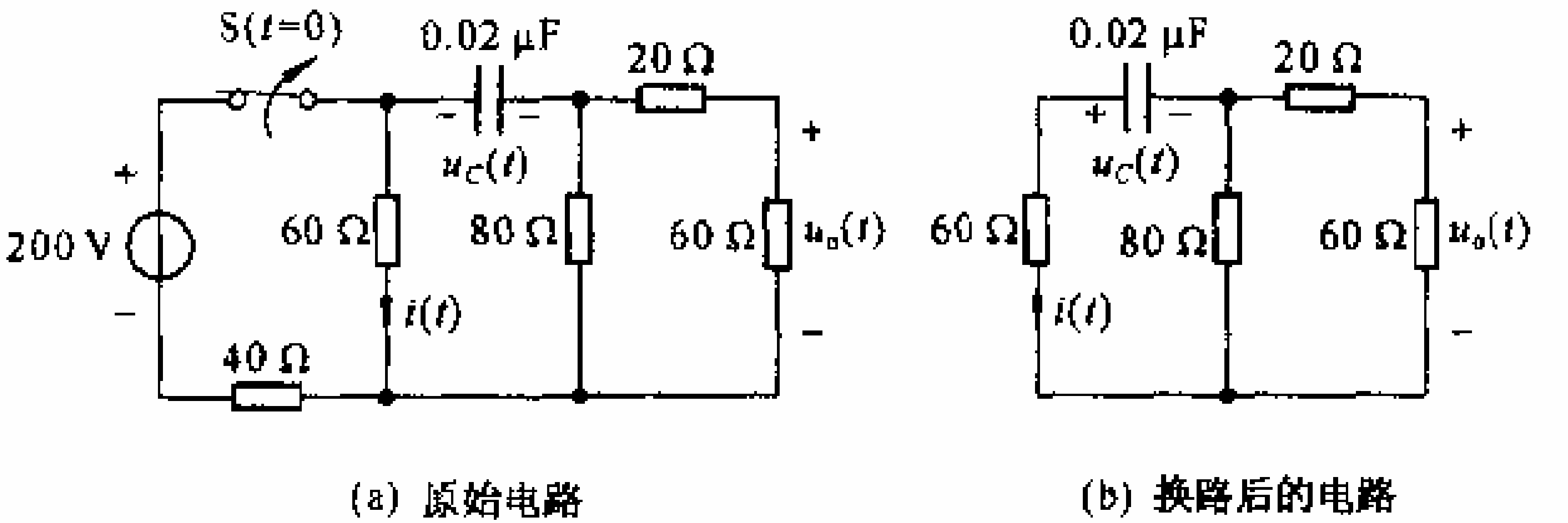


图 4－1－5　多电阻一阶电路的零输入响应计算示例

- 初始值 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=\dfrac{60}{60+40}\times 200=120(\text{V})$

$$i(0_+)=\frac{u_c(0_+)}{100}=\frac{120}{100}=1.2(\text{A}) \qquad u_o(0_+)=-\frac{i(0_+)}{2}\times 60=-36(\text{V})$$

- 等效电阻与时间常数

$$R_{eq}=\left(60+\frac{80}{2}\right)\Omega=100\Omega \qquad \tau=R_{eq}C=2\times 10^{-6}(s)$$

- 零输入响应

$$i(t)=i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=1.2e^{-0.5\times 10^6 t}\ A \qquad ,t\geq 0_+$$

$$u_o(t)=u_o(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=-36e^{-0.5\times 10^6 t}\ V \quad ,t\geq 0_+$$

- 例题4-1-2：$i(0_+)=150mA$ 求 $u(t)$

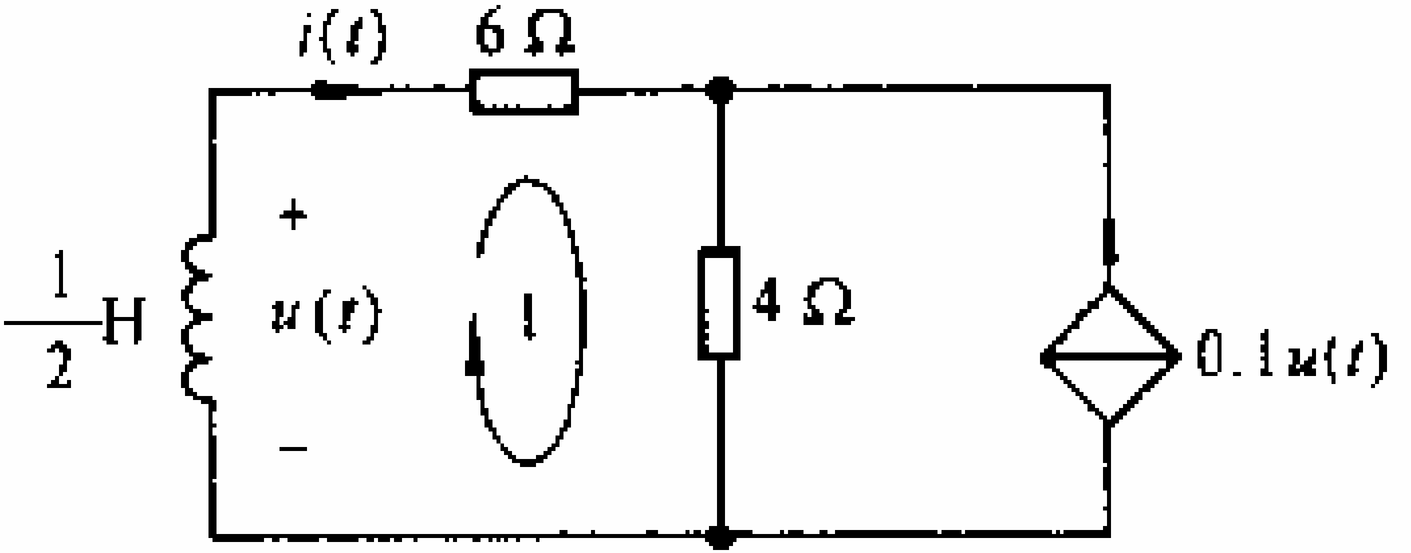


图4-1-6　含有受控源的一阶电路的零输入响应计算示例

- 对选择的回路，根据KVL：

$$u(t) = 6i(t) + 4i(t) + 4 \times 0.1u(t)$$

- 电感两端等效电阻：$R_{eq} = u(t)/i(t) = 100/6\ \Omega$
-
- RL电路时间常数：$\tau = \dfrac{L}{R_{eq}} = \dfrac{3}{100}$
- 变量初值：$u(0_+) = i(0_+)R_{eq} = 150 \times 10^{-3} \times \dfrac{100}{6} = 2.5$
- 零输入响应电压：

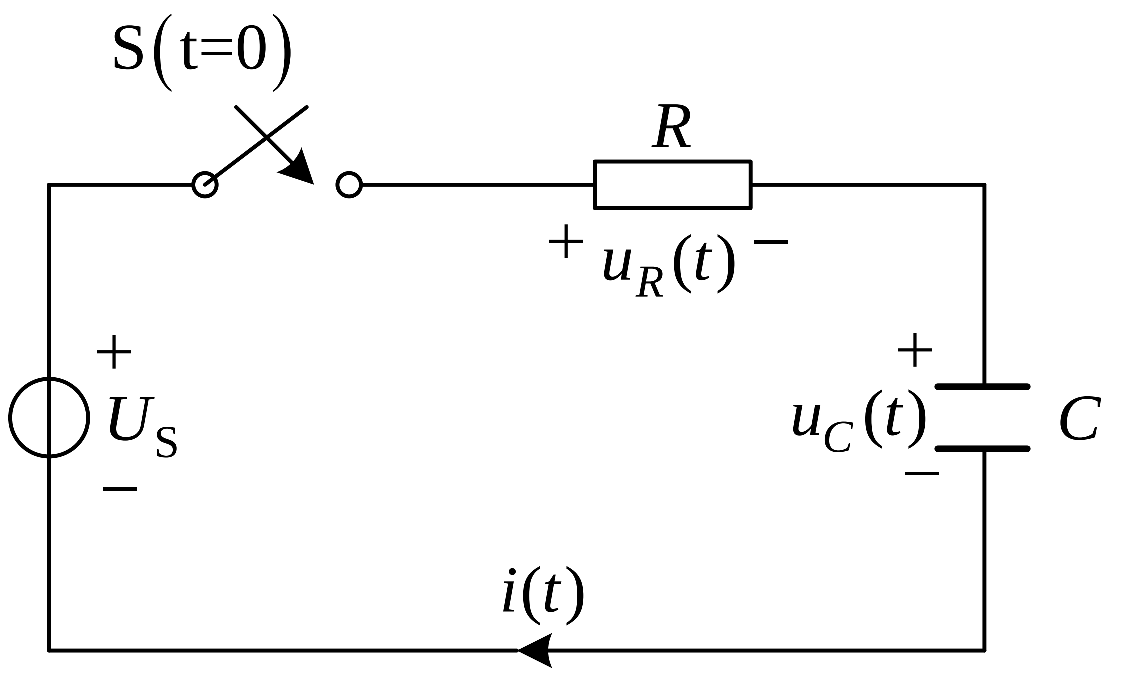
$$u(t) = u(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2.5e^{-\frac{100}{3}t}\ \mathrm{V} \quad ,t \geq 0_+$$

5-3 一阶电路的零状态响应

- 零状态响应
  - 所有储能元件都没有原始储能(电容元件的电压为0，电感元件的电流为0)时，换路后仅由输入激励（独立源）产生的响应
- 典型一阶电路：
  - RC电路：由电阻元件与电容元件组成。
  - RL电路：由电阻元件与电感元件组成。

5-3-1 RC电路的零状态响应

- 电路模型
- 待分析量：换路后$u_c(t)$、$i(t)$及其变化规律



5-3-1 RC电路的零状态响应

- 换路后，由KVL定律可得

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=U_\mathrm{S}$$

- 根据方程右边，令特解 $u_C{}'(t)=K$
- 代入微分方程，可得 $u_C{}'(t)=U_\mathrm{S}$
- 微分方程的特征根

$$s=-\frac{1}{RC}$$

- 齐次微分方程的通解 $u_C{}''(t)=Ae^{-t/RC}=Ae^{-t/\tau}$
- 零状态响应

$$u_C(t)=u_C{}'(t)+u_C{}''(t)=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 代入初始条件

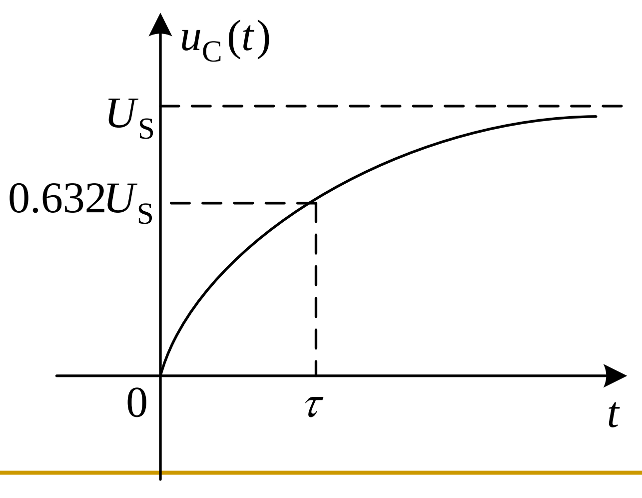
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -U_S$$

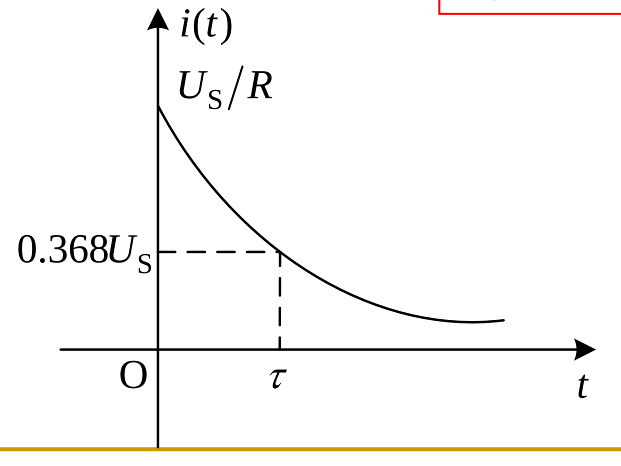
- 零状态响应

$$u_C(t) = U_S - U_S e^{-t/\tau} = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , t \ge 0^+$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad t \ge 0_+$$

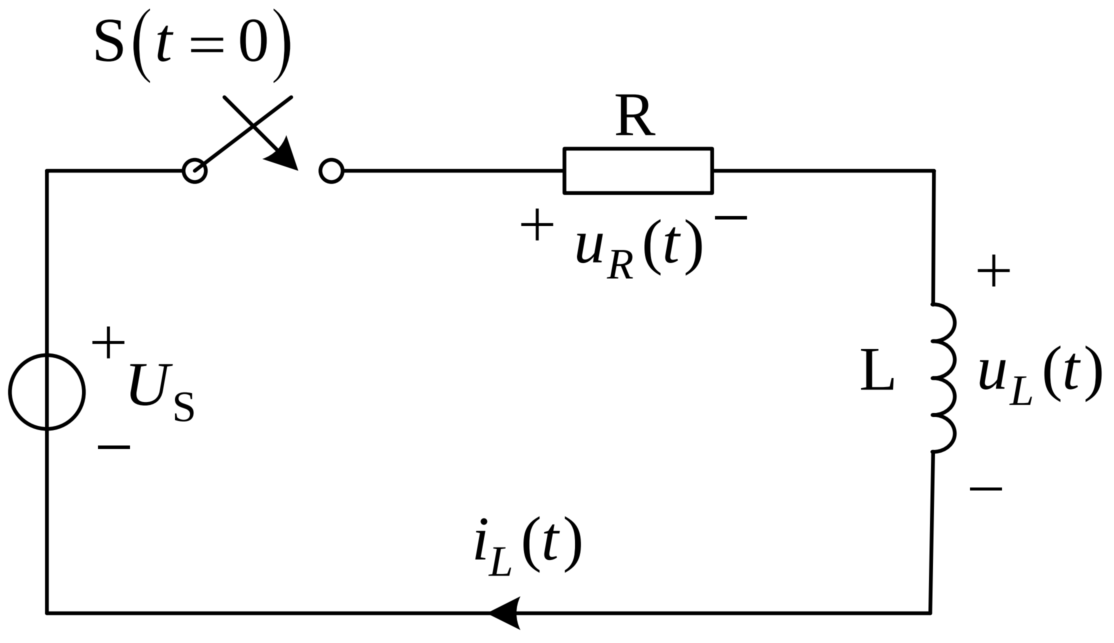
物理意义？





5-3-2 电路的零状态响应

- 电路模型
- 待分析量：$i_L(t)$、$u_R(t)$、$u_L(t)$



5-3-2 电路的零状态响应

- 换路后，根据KVL

$$u_R(t) = Ri_L(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u_R(t) + u_L(t) = U_\mathrm{S}$$

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = \frac{U_s}{R}$$

- 特解与通解

$$i_L{}'(t) = \frac{U_s}{R}$$

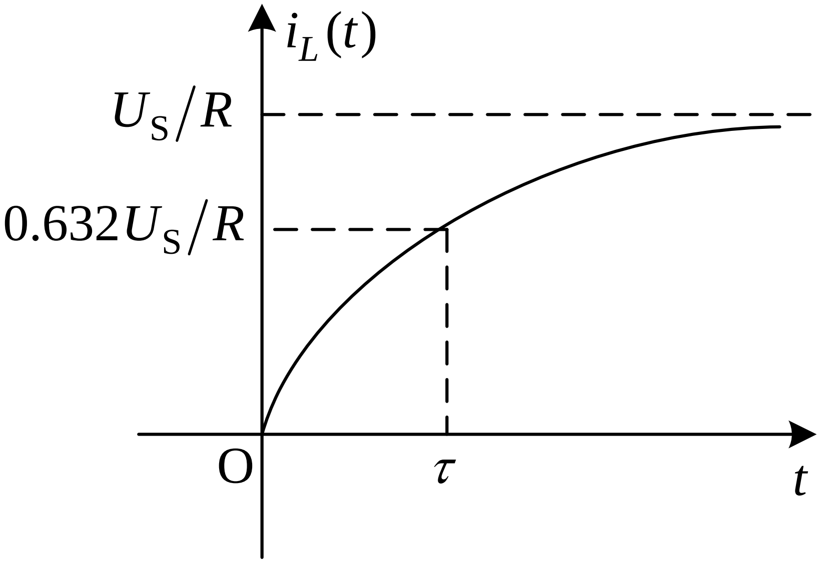
$$i_L{}''(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

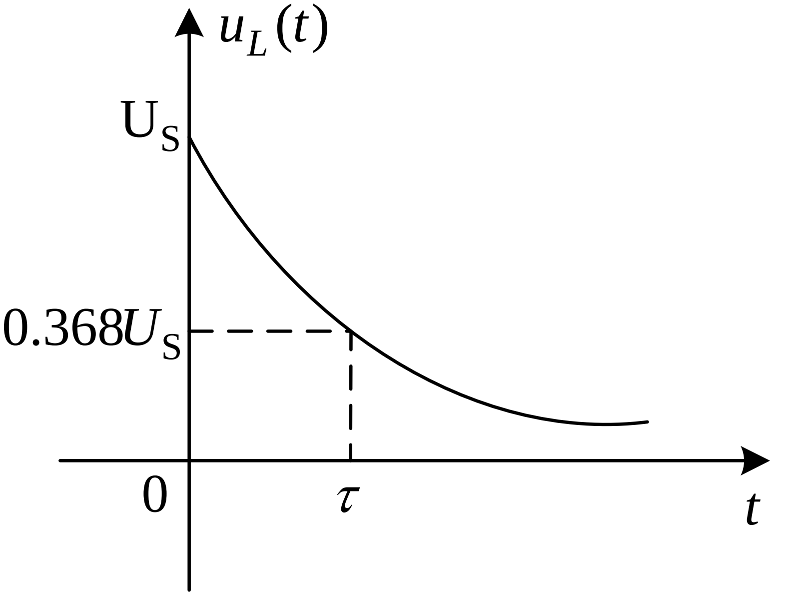
$$i_L(t)=i_L'(t)+i_L''(t)=\frac{U_s}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U_s}{R}+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始条件 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$ ⇨ $A=-U_s/R$

$$i_L(t)=\frac{U_s}{R}-\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U_s}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\quad ,t\geq 0_+$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=U_se^{-\frac{t}{\tau}}\quad ,t\geq 0_+$$

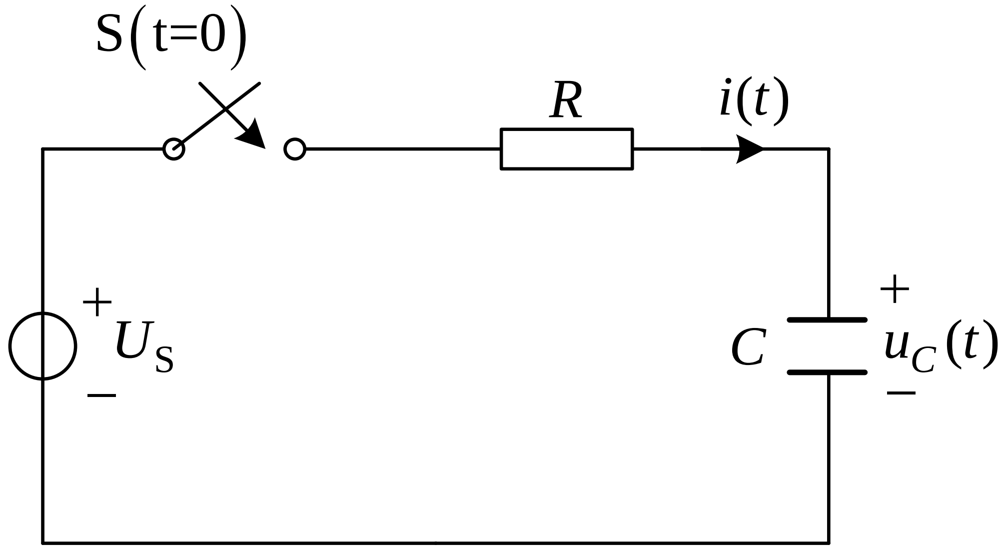




物理意义?

5-4 一阶电路全响应

- 一阶电路的全响应：
  - 在动态元件原始储能和独立源共同作用下，一阶电路的响应。
- 以RC电路为例（RL电路结论相似）



$$u_c(0_-) = U_0$$

5-4 一阶电路全响应

- 分析思路（利用叠加原理）
  - 全响应=零输入响应+零状态响应
- 零输入响应

$$u_{ZI}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_{ZI}(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 零状态响应

$$u_{ZS}(t) = U_S - U_S e^{-t/\tau} = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$i_{ZS}(t) = \frac{U_S}{R} e^{-t/\tau}$$

5-4 一阶电路全响应

- 全响应

$$u_C(t)=u_{ZI}(t)+u_{ZS}(t)=\underbrace{U_s}_{\text{稳态响应}}+\underbrace{\left(U_0-U_s\right)e^{-t/\tau}}_{\text{暂态响应}}\quad ,t\geq 0_+$$

$$i(t)=i_{ZI}(t)+i_{ZS}(t)=\underbrace{0}_{\text{稳态响应}}+\underbrace{\left(\frac{U_s}{R}-\frac{U_0}{R}\right)e^{-t/\tau}}_{\text{暂态响应}}\quad ,t\geq 0_+$$

稳态响应：具有固定取值或周期性变化，不随时间推移而消逝，是电路稳定后电路变量的取值或变化规律。

暂态响应：随时间推移呈指数规律下降，经过足够长时间后消失。

一阶电路全响应的分解

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

　　　= 自然响应 + 强迫响应

　　　= 稳态响应 + 暂态响应

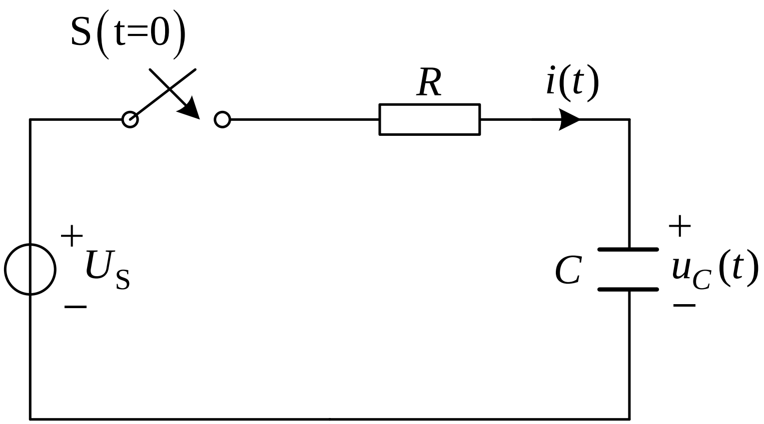
物理解释？

5-5 一阶电路分析的三要素法

- 一阶电路全响应内在规律（RC电路为例）

$$u_C(t)=u_{ZI}(t)+u_{ZS}(t)=\underbrace{U_s}+(\underbrace{U_0}-\underbrace{U_s})e^{-t/\tau}\quad ,t\ge 0_+$$

$$i(t)=i_{ZI}(t)+i_{ZS}(t)=\underbrace{0}+\left(\underbrace{\left(\frac{U_s}{R}-\frac{U_0}{R}\right)}-\underbrace{0}\right)e^{-t/\tau}\quad ,t\ge 0_+$$



$u_c(0_-)=U_0$

初值： $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

$$i(0_+)=\frac{U_S}{R}-\frac{U_0}{R}$$

终值： $u_C(\infty)=U_S$

$$i(\infty)=0$$

5-5 一阶电路分析的三要素法

- 三要素法

$$f(t)=\underbrace{f(\infty)}_{\text{终值}}+\left[\underbrace{f(0_+)}_{\text{初值}}-\underbrace{f(\infty)}_{\text{终值}}\right]e^{-t/\tau}\quad ,t\geq 0_+$$

- 为求解一阶电路中任一电路变量的全响应，我们仅须知道**三个要素**：**电路变量的初值**、**电路变量的终值**以及一阶电路的**时间常数**。
- 三要素法适用范围
  - **直流**激励的一阶RC电路、RL电路中任意电路变量

5-5 一阶电路分析的三要素法

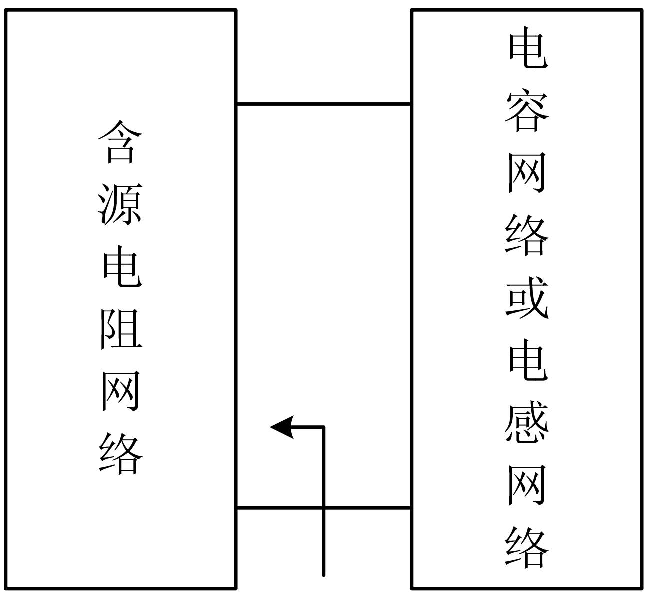
- **6-5-2 推广的三要素法**

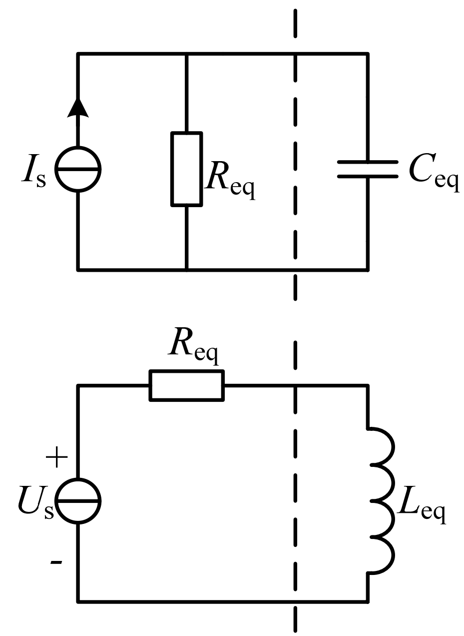
$$f(t) = \underbrace{f_w(t)}_{\text{稳态响应}} + [\underbrace{f(0_+)}_{\text{全响应的初值}} - \underbrace{f_w(0_+)}_{\text{稳态响应的初值}}]e^{-t/\tau}$$

  - 适用：一阶电路中激励源不是直流，而是符合一定变化规律的交流量（如正弦交流信号）。

5-5 一阶电路分析的三要素法

- "三要素"的计算与应用（假设直流激励）
  - 初值的计算
  - 终值的计算
  - 时间常数的计算

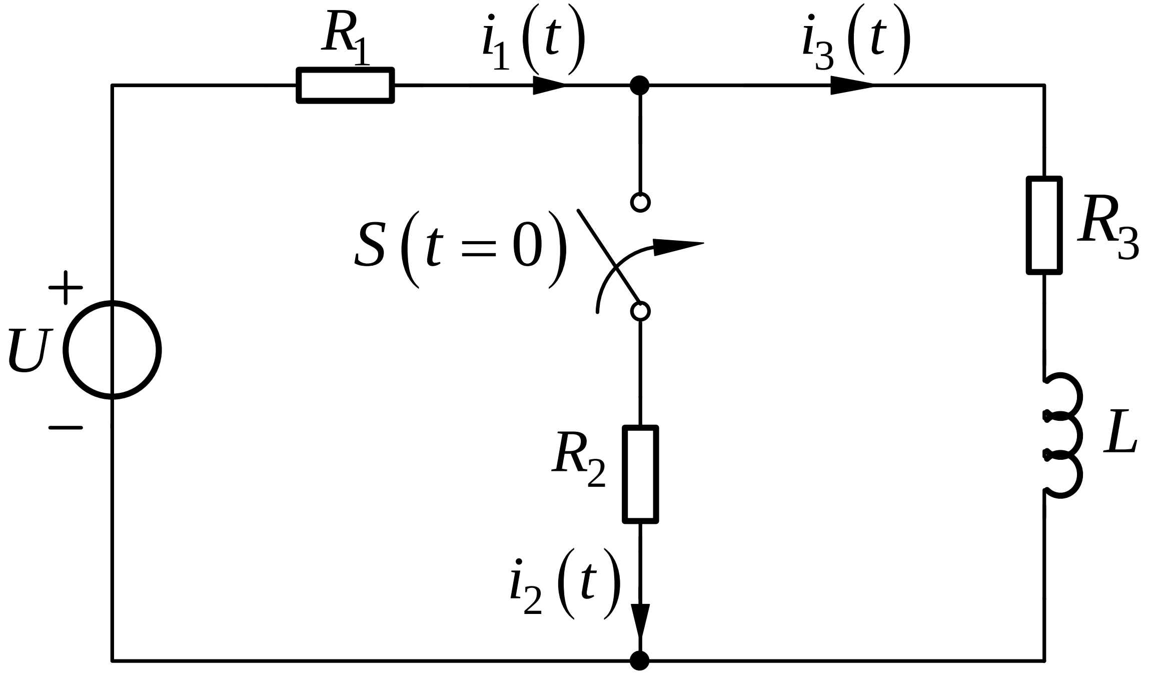


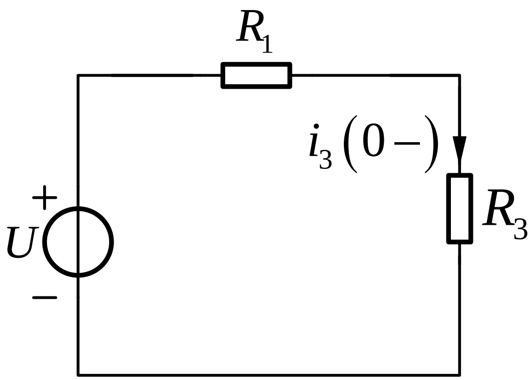


例题

- 用三要素法求换路后各支路的电流。

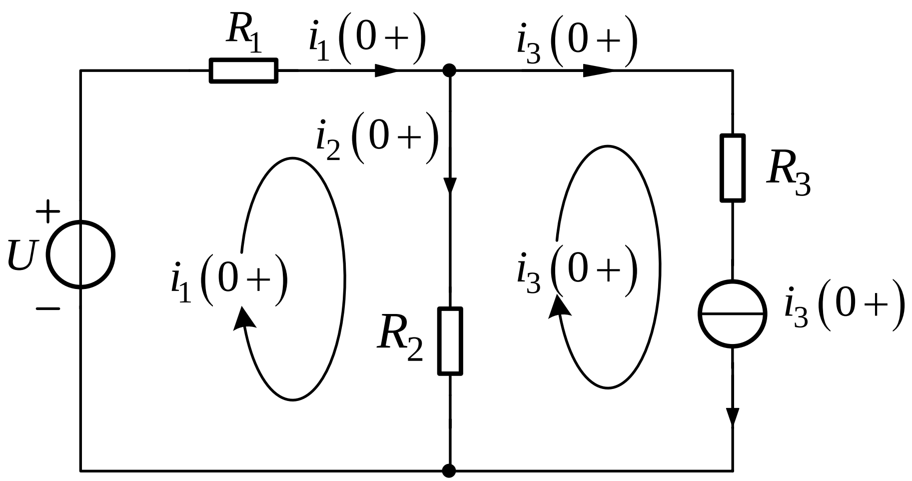
$U=10V\quad R_1=R_2=30\Omega\quad R_3=30\Omega\quad L=1H$





t=0-时刻等效电路

$$i_3(0_-)=\frac{U}{R_1+R_3}=\frac{10}{30+20}=0.2(\mathrm{A})$$



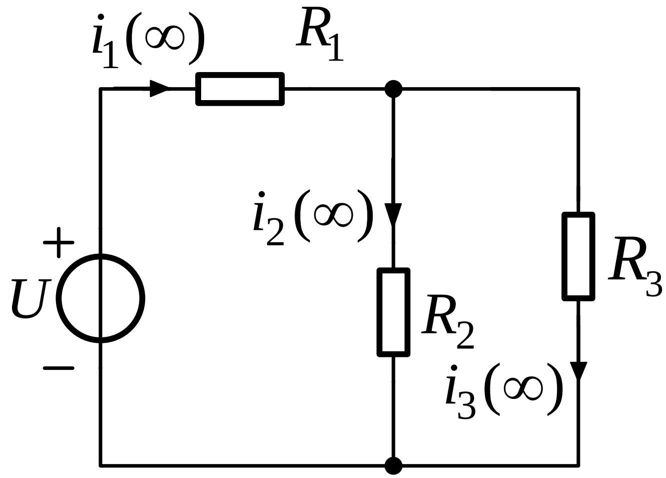
t=0+时刻等效电路

$$i_3(0_+)=i_3(0_-)=0.2(\mathrm{A})$$

$$(R_1+R_2)i_1(0_+)-R_2 i_3(0_+)=U$$

$$i_1(0_+)=0.267(\mathrm{A})$$

$$i_2(0_+)=i_1(0_+)-i_3(0_+)=0.067(\mathrm{A})$$

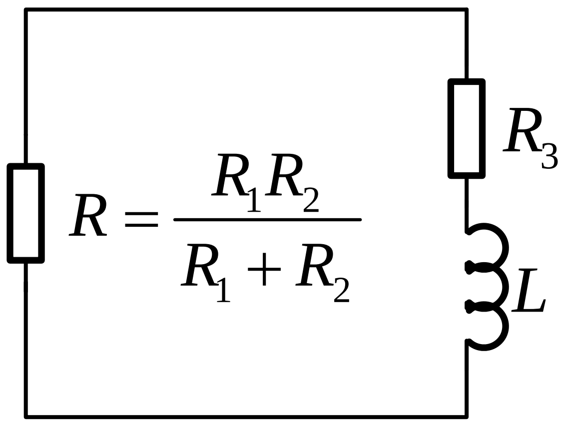


t→∞时刻等效电路

$$i_1(\infty) = \frac{U}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = 0.238(\text{A})$$

$$i_3(\infty) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1(\infty) = 0.143(\text{A})$$

$$i_2(\infty) = i_1(\infty) - i_3(\infty) = 0.095(\text{A})$$



自然响应的等效电路

$$\tau = \frac{L}{R + R_3} = \frac{1}{15 + 20} = \frac{1}{35}(\text{s})$$

$$i_1(t)=i_1(\infty)+[i_1(0_+)-i_1(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=0.238+(0.267-0.238)e^{-35t}$$

$$=0.238+0.029e^{-35t}(\mathrm{A}) \qquad t\geq 0_+$$

$$i_3(t)=i_3(\infty)+[i_3(0_+)-i_3(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=0.143+(0.2-0.143)e^{-35t}$$

$$=0.143+0.057e^{-35t}(\mathrm{A}) \qquad t\geq 0_+$$

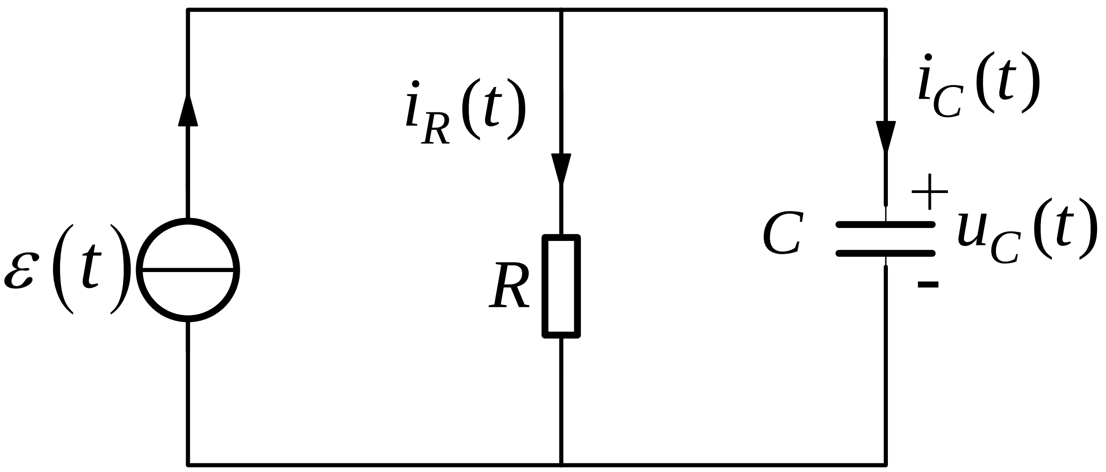
$$i_2(t)=i_1(t)-i_3(t)=0.095-0.028e^{-35t}(\mathrm{A}) \qquad t\geq 0_+$$

5-6 一阶电路的阶跃响应和冲激响应

- 单位阶跃响应（简称阶跃响应）
  - 电路在**单位阶跃电压或单位阶跃电流激励**下的零状态响应。
- 单位冲激响应（简称冲激响应）
  - 电路在**单位冲激电压或单位冲激电流激励**下的零状态响应。

5-6-1 一阶电路的阶跃响应

- RC电路阶跃响应
- 分析方法：可以采用微分方程求解的方法，但简便起见，我们直接采用“三要素”法。



$$\varepsilon(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_c(0+) = u_c(0-) = 0$$

$$\tau = RC$$

RC电路的单位阶跃响应

- 初值：

$$u_c(0_+) = 0$$

$$i_R(0_+) = u_c(0_+)/R = 0$$

$$i_c(0_+) = \varepsilon(0_+) = 1A$$

- 终值：

$$i_c(\infty) = 0A$$

$$i_R(\infty) = 1A$$

$$u_C(\infty) = i_R(\infty)R = R$$

RC电路的单位阶跃响应

- 电容电压的阶跃响应

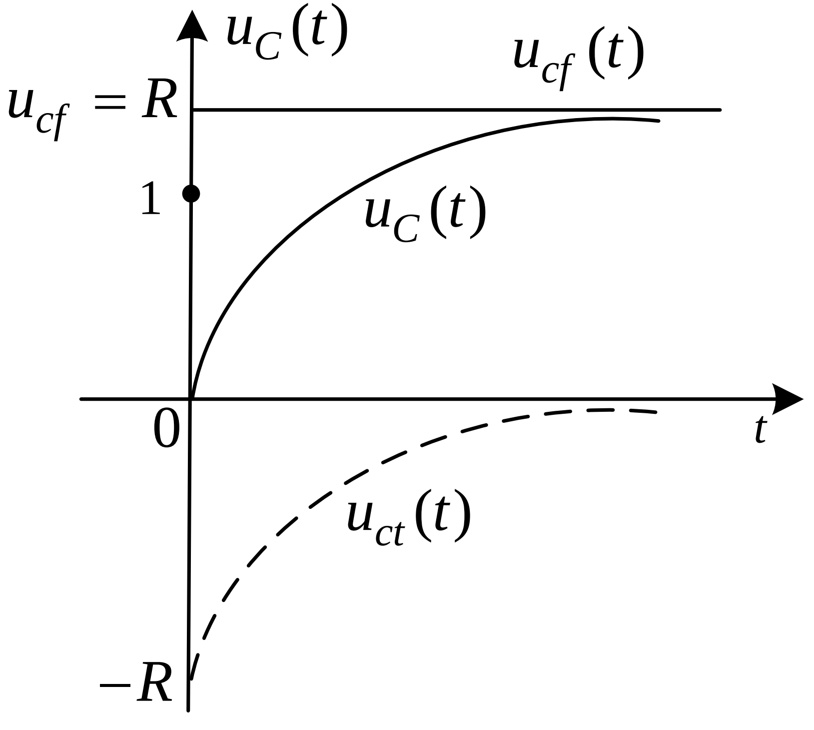
$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

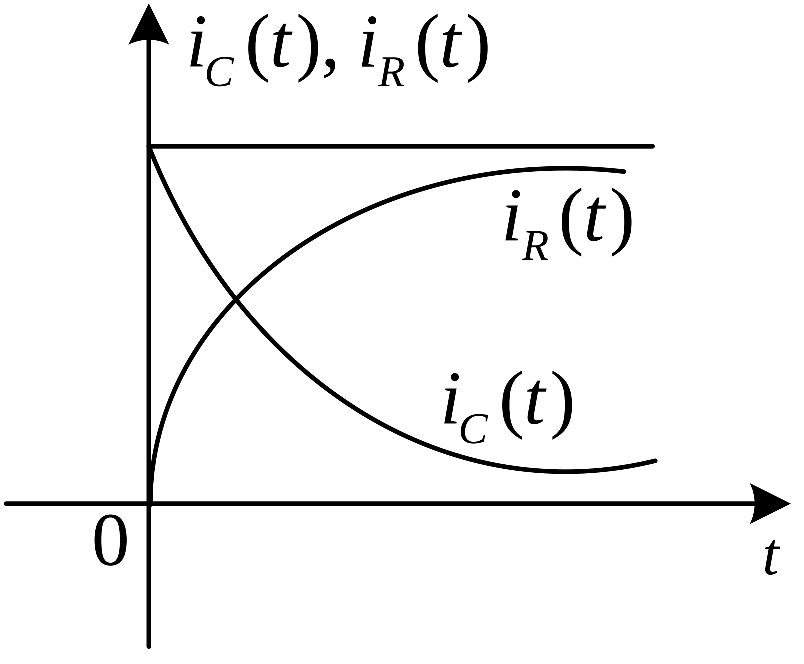
- 电阻电流和电容电流

$$i_R(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i_C(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

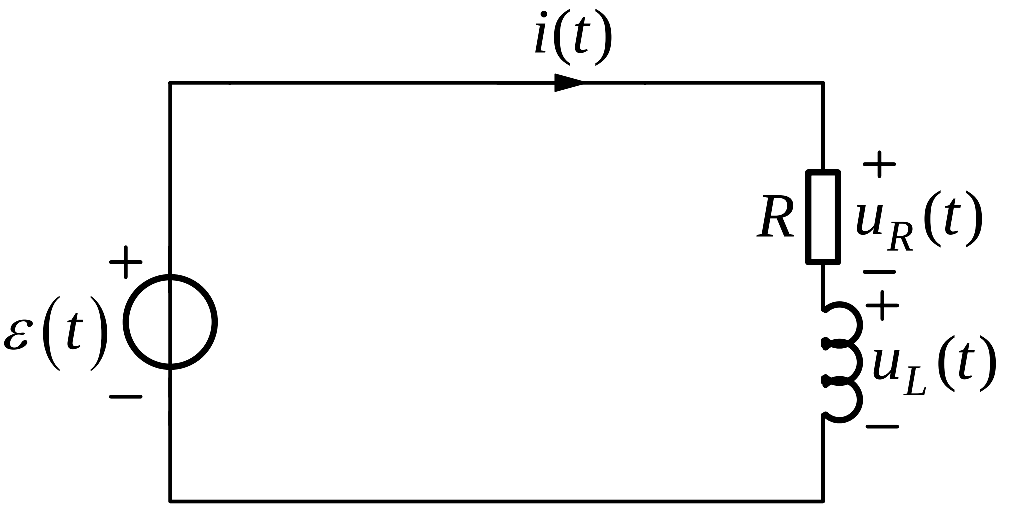
RC电路的单位阶跃响应





RL电路的阶跃响应

- 同样采用“三要素”法



$$\varepsilon(\mathrm{t})=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

$$i(0_+)=i(0_-)=0$$

$$\tau=\frac{L}{R}$$

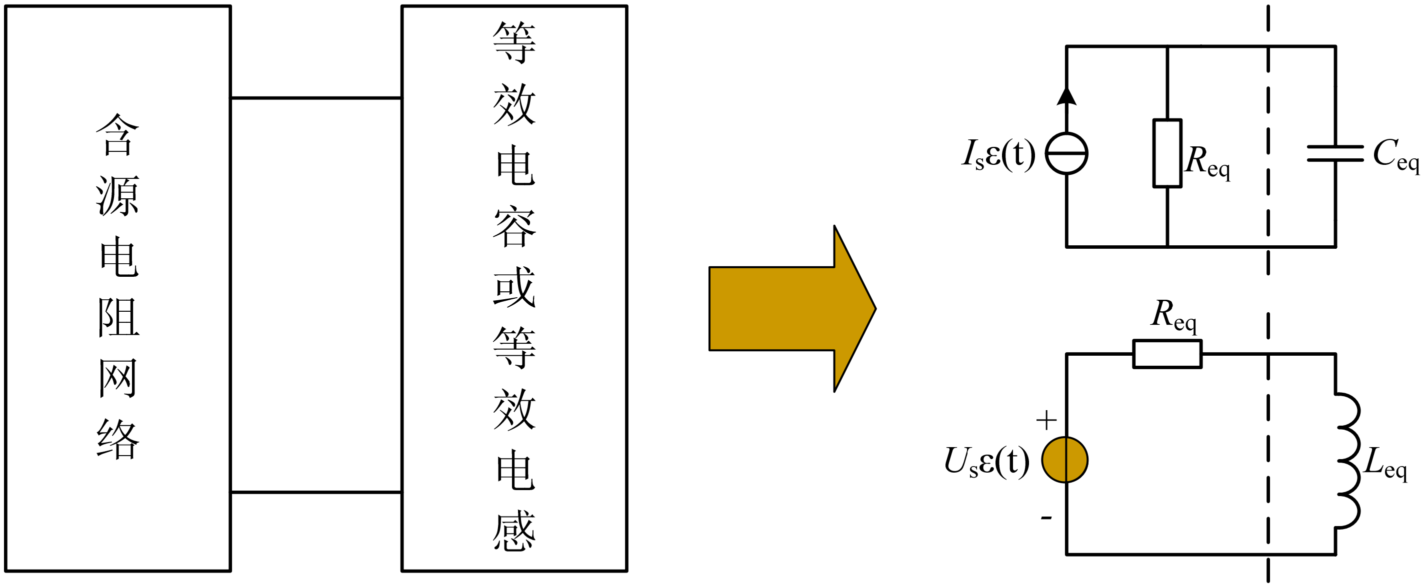
RL电路的阶跃响应

- 初值： $i(0_+) = i(0_-) = 0$ $u_L(0_+) = 1$
- 终值： $u_L(\infty) = 0$ $i(\infty) = \dfrac{1}{R}$
- 阶跃响应：

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$

$$u_L(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

5-6-2 一阶电路阶跃响应的一般分析方法与应用



$$\begin{cases} RC\text{一阶电路}: u_{c_{eq}}(t) = I_s R_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}})\varepsilon(t) \\ RL\text{一阶电路}: i_{L_{eq}}(t) = \dfrac{U_s}{R_{eq}}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}}t})\varepsilon(t) \end{cases}$$

善于利用线性电路的性质：齐次性、可加性、时移不变性。

例题分析

- 例题：RC电路的矩形脉冲激励零状态响应
  $u_C(t)$

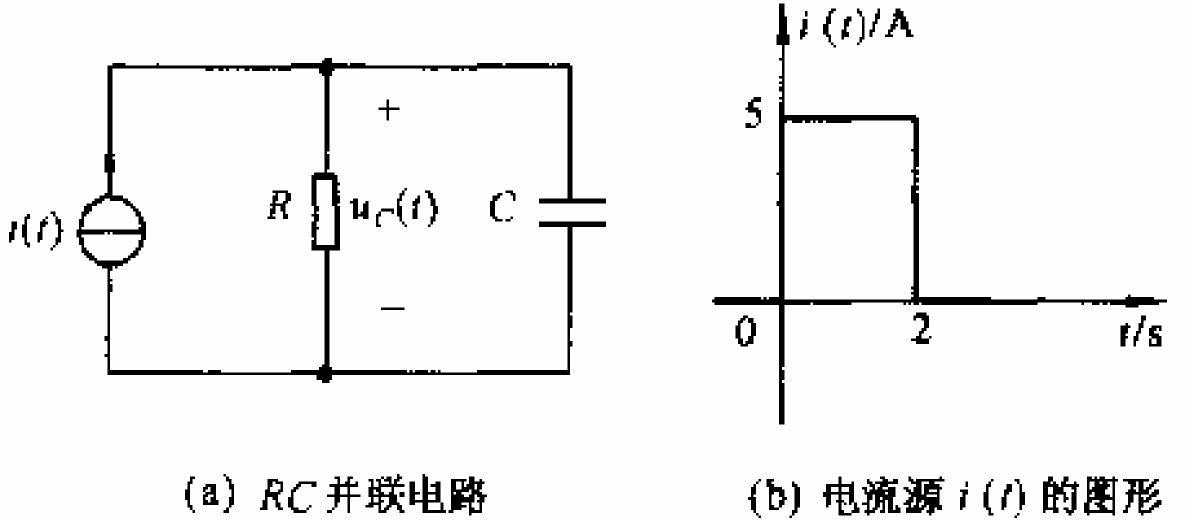


图 4－2－7　零状态响应的计算示例

例题分析

- 矩形脉冲电流可用两个阶跃电流表示

$$i(t)=5\varepsilon(t)-5\varepsilon(t-2)$$

- RC并联电路的单位阶跃响应

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

- 由线性电路齐次性、可加性和时移不变性

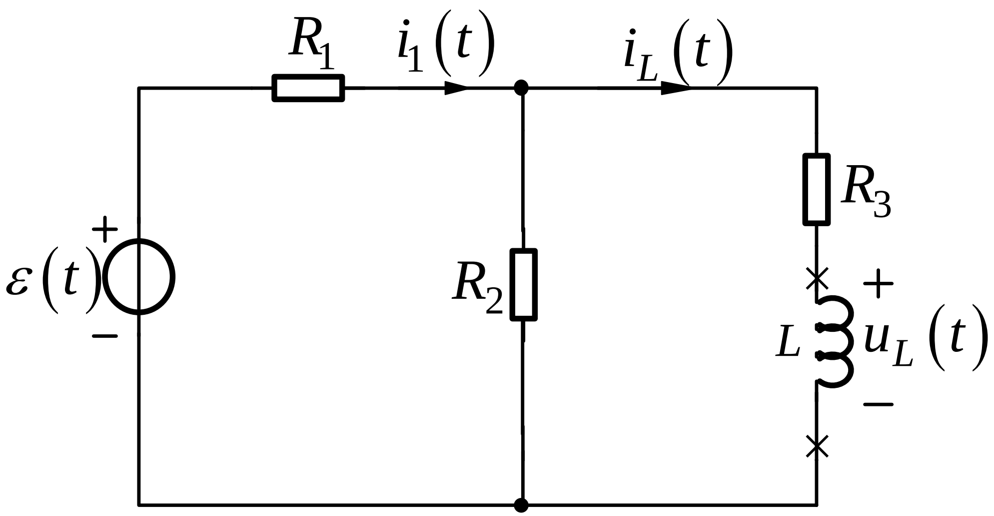
$$u_C(t)=u_{C1}(t)-u_{C2}(t)=5R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)-5R(1-e^{-\frac{t-2}{RC}})\varepsilon(t-2)$$

例题分析

- 求阶跃响应 $i_L(t)$ $u_L(t)$

$$R_1=8\Omega, R_2=8\Omega, R_3=6\Omega \quad L=1\text{H}$$

分析：可将电感元件以外的电路作戴维宁等效变换，而后即可直接写出答案。



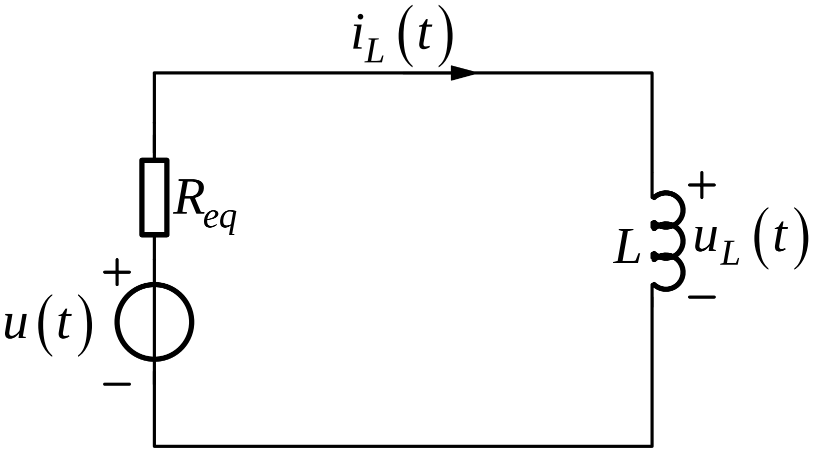
开路电压：

$$u(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\varepsilon(t)=0.5\varepsilon(t)$$

等效电阻：

$$R_{eq}=R_3+(R_1 // R_2)=10\Omega$$

例题分析



时间常数：

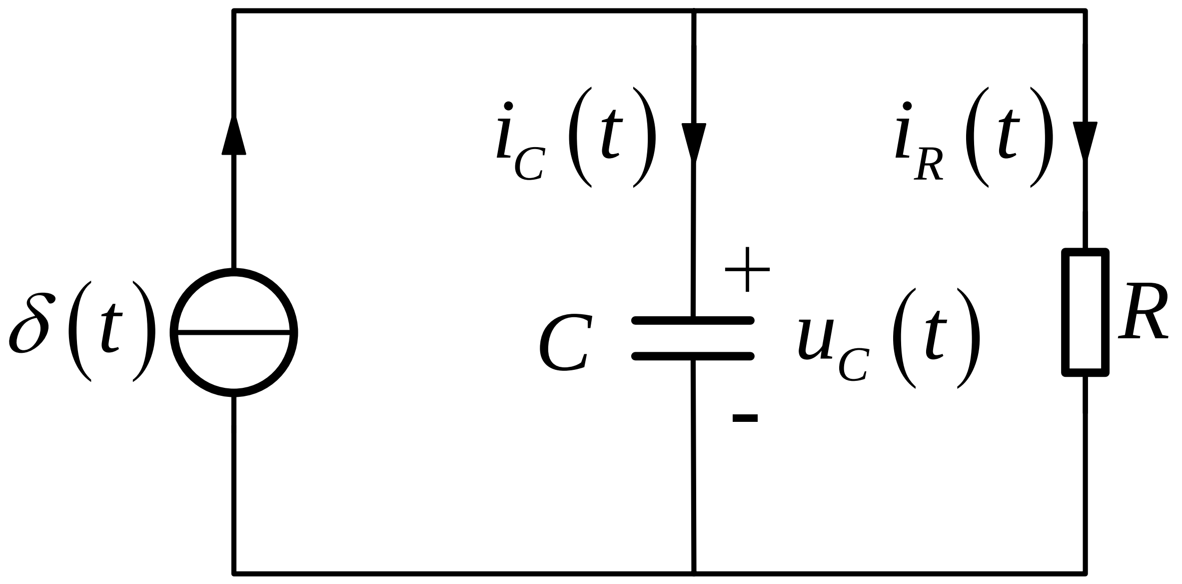
$$\tau = \frac{R_{eq}}{L} = 0.1$$

$$i_L(t) = \frac{0.5}{R_{eq}}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t) = 0.05(1 - \mathrm{e}^{-10t})\varepsilon(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 0.5\,\mathrm{e}^{-10t}\,\varepsilon(t)$$

5-6-3 一阶电路的冲激响应

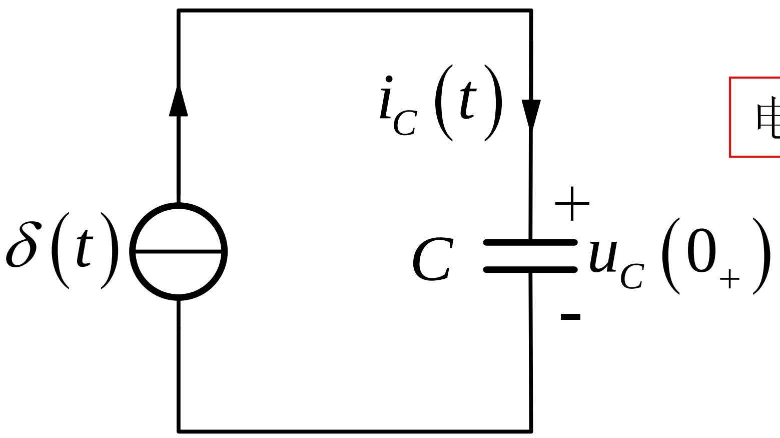
- **RC电路的冲激响应**
  - 重点关注冲激信号的基本属性



RC电路的冲激响应

- 第一阶段，0-至0+时刻：电容短路，电流全部流过电容，电阻支路电流为0。

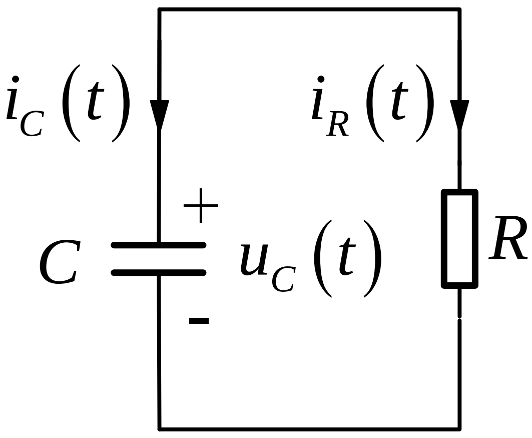
$$u_c(0_+) = u_c(0\_) + \frac{1}{C}\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt = \frac{1}{C}$$



电容通过冲激电流建立了电场，获得了能量。

RC电路的冲激响应

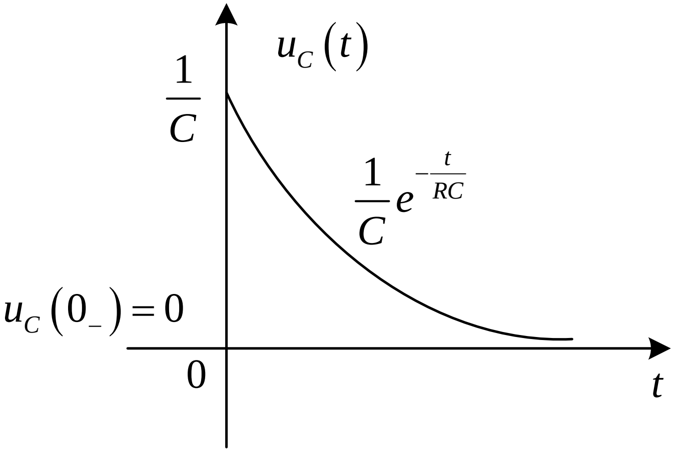
- 第二阶段， 0+时刻以后：电流源相当于开路。电路的状态变化体现为电容元件C通过电阻R放电的过程，其分析方法与零输入响应完全相同。



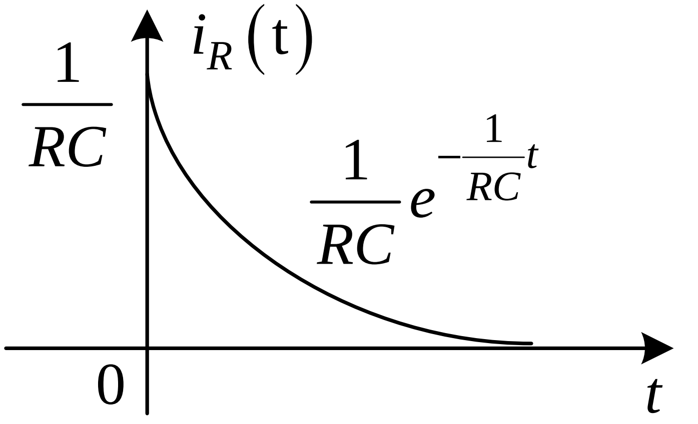
$$u_c(t)=u_c(0_+)e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_R(t)=\frac{u_c(t)}{R}=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

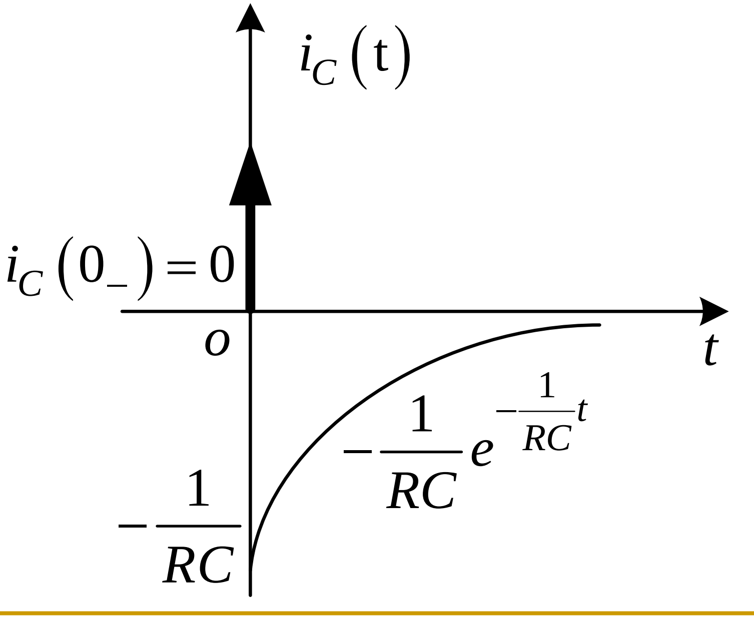
$$i_C(t)=\delta(t)-i_R(t)=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



$u_C(t)$
$\frac{1}{C}$
$\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$
$u_C(0_-)=0$
0
t



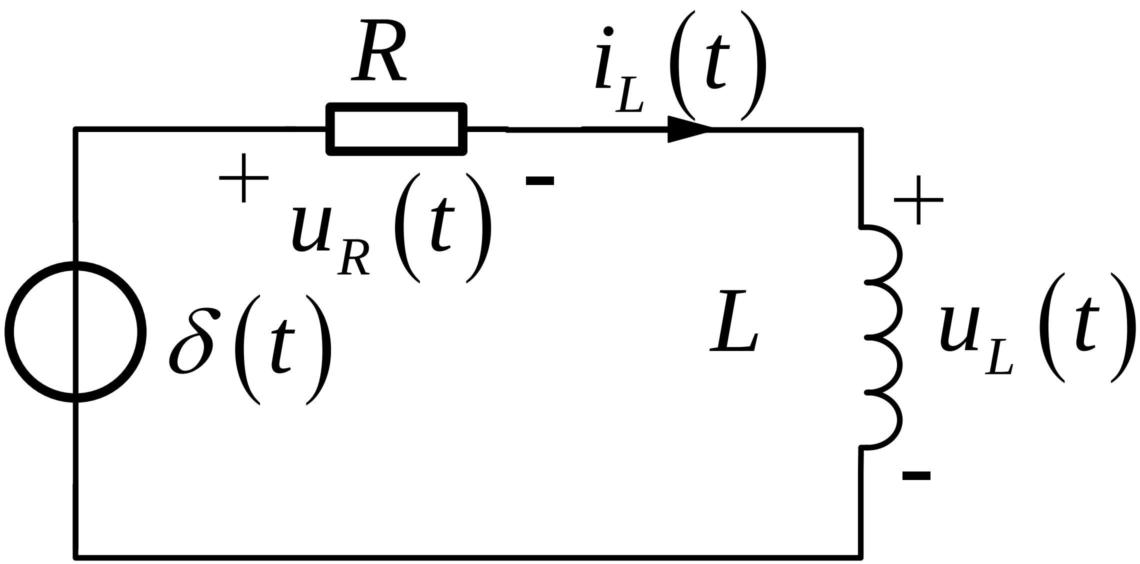
$i_R(\mathrm{t})$
$\frac{1}{RC}$
$\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$
0
t



$i_C(\mathrm{t})$
$i_C(0_-)=0$
o
t
$-\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$
$-\frac{1}{RC}$

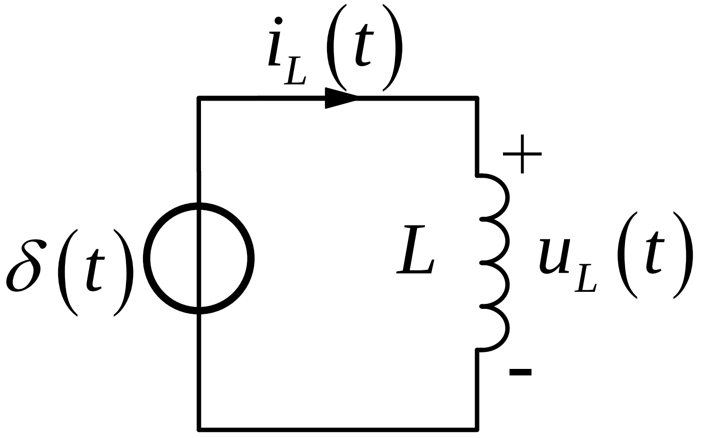
RL电路的冲激响应

- 电路模型



RL电路的冲激响应

- 第一阶段， 0-至0+时刻：电感为开路状态，电压源电压全部施加在电感两端，电阻两端电压为0。

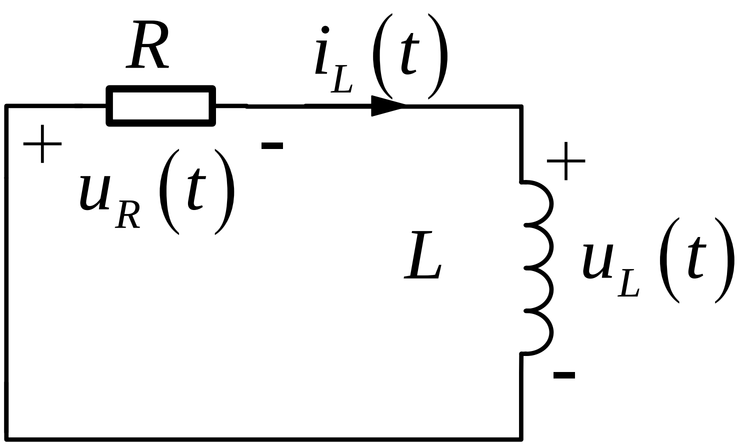


$$i_L(0_+) = i_L(0\_) + \frac{1}{L}\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt = \frac{1}{L}$$

电感通过冲激电压建立了磁场，获得了能量。

RL电路的冲激响应

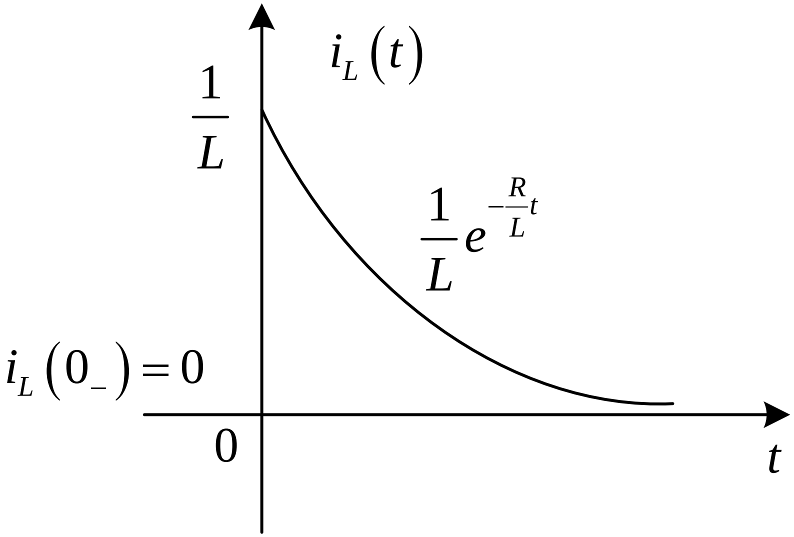
- 第二阶段， 0+时刻以后：电压源相当于短路，电路的状态变化体现为电感元件L通过电阻R释放能量的过程，其分析方法与零输入响应完全相同。

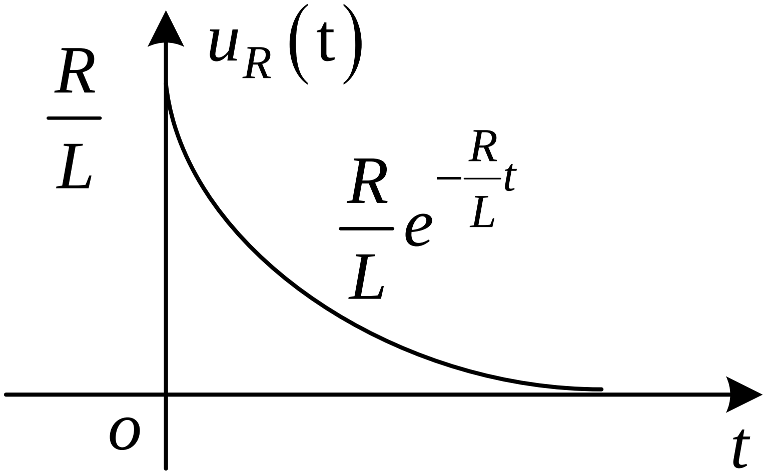


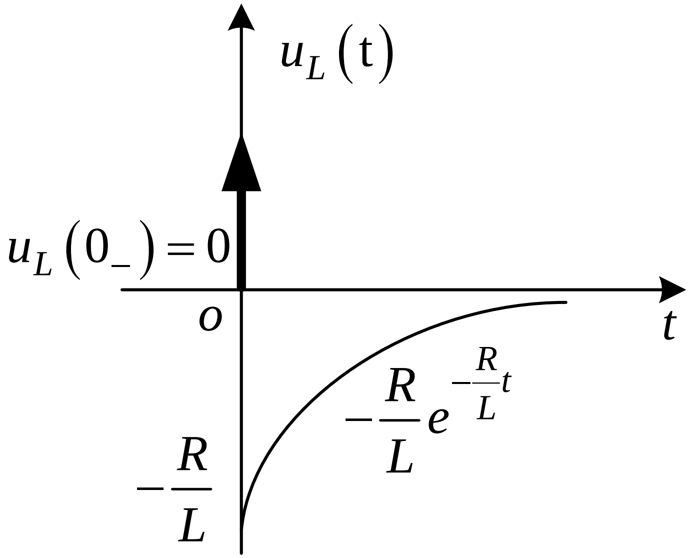
$$i_L(t)=i_L(0_+)e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

$$u_R(t)=i_L(t)R=\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

$$u_L(t)=\delta(t)-u_R(t)=\delta(t)-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$


$i_L(t)$
$\frac{1}{L}$
$\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$
$i_L(0_-)=0$
0
t

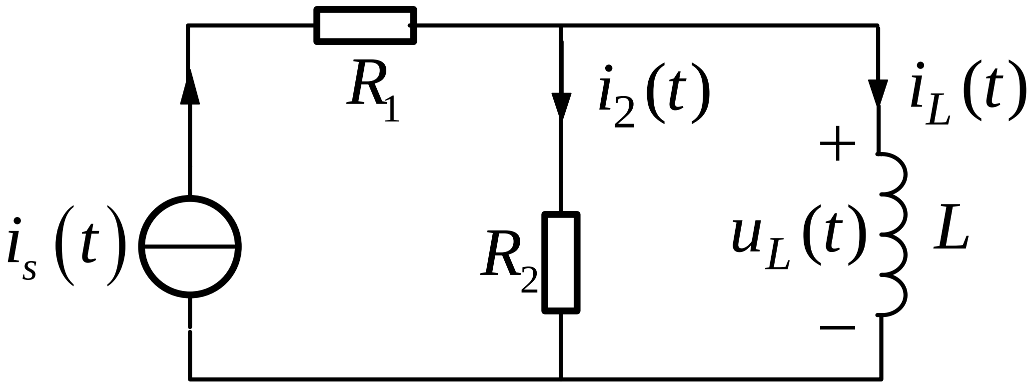

$u_R(\mathrm{t})$
$\frac{R}{L}$
$\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$
o
t


$u_L(\mathrm{t})$
$u_L(0_-)=0$
o
t
$-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$
$-\frac{R}{L}$

例题

- 求电路的零状态响应 $i_L(t)$ $u_L(t)$

$i_s(t)=\delta(t)$ $L=1\text{H}$ $R_1=R_2=1\Omega$



0-时刻，电感处于开路状态，换路瞬间R2上形成冲激电压$\delta(t)$，作用于L强迫其电流发生突变

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt=1 \quad \text{A}$$

- 时刻以后，电流源不再作用，相当于开路，电感通过电阻R2释放能量，电感线圈上响应电流为

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{R_2}{L}t}\varepsilon(t) = e^{-t}\varepsilon(t) \quad \text{A}$$

- 电阻所在支路电流为

$$i_2(t) = i_s(t) - i_L(t) = \delta(t) - e^{-t}\varepsilon(t) \quad \text{A}$$

- 电感电压即电阻R2的端电压

$$u_L(t) = i_2(t)R_2 = \delta(t) - e^{-t}\varepsilon(t) \quad \text{V}$$

冲激响应与阶跃响应间的关系

- 单位冲激函数与单位阶跃函数关系

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt' \qquad \delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

- 冲激响应与阶跃响应关系

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt} \qquad g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t')dt'$$

h(t): 单位冲激响应　　g(t): 单位阶跃响应

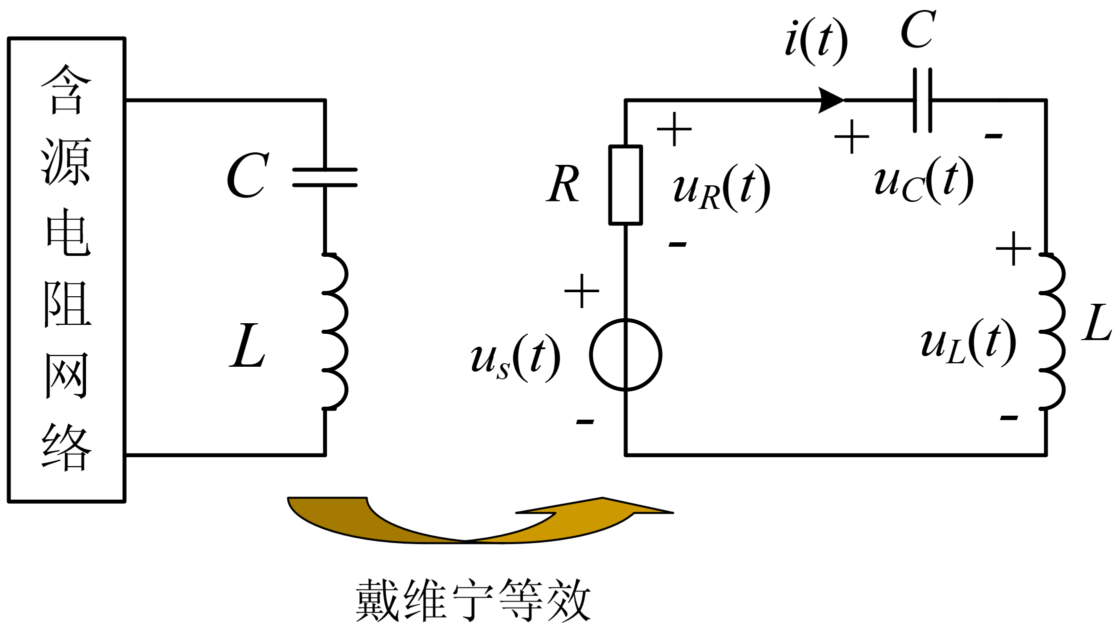
- 由单位冲激响应求任意激励信号的零状态响应

$$r(t)=h(t)*s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)s(t-\tau)d\tau$$

5-7 二阶电路及其特征

- 二阶电路的输入-输出方程表现为二阶线性微分方程
- 二阶电路包含两个独立的动态元件，可以是一个电感与一个电容、两个电感或两个电容
- 最基本的二阶电路
  - 包含一个电容元件与一个电感元件
  - RLC串联电路
  - RLC并联电路（自学）

RLC串联电路



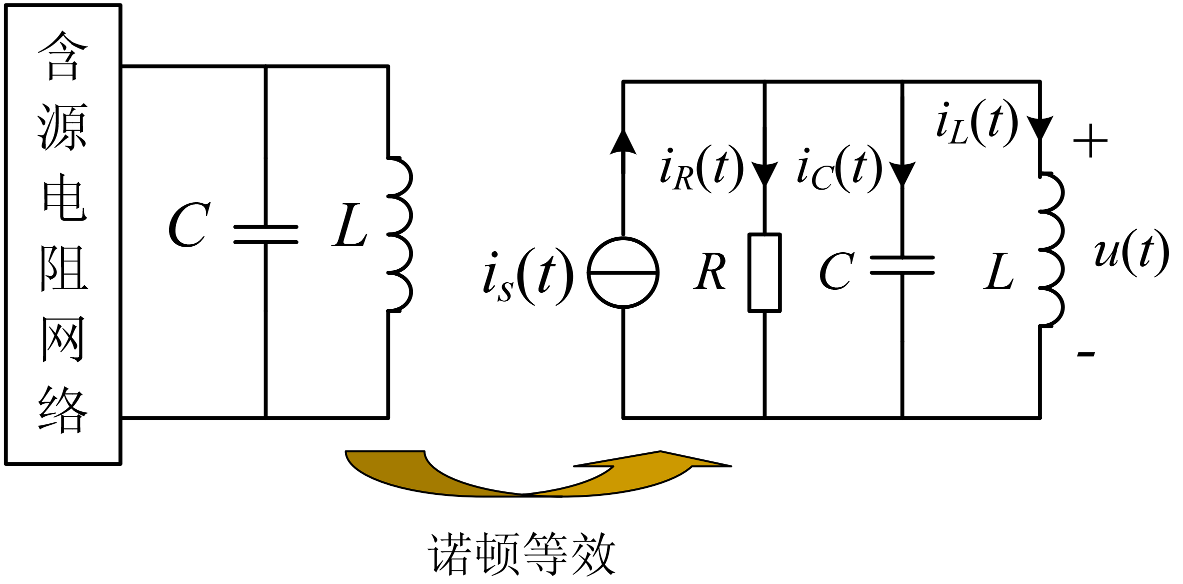
$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

KVL：$$u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = u_s(t)$$

输入-输出方程: $$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_s(t)$$

RLC并联电路



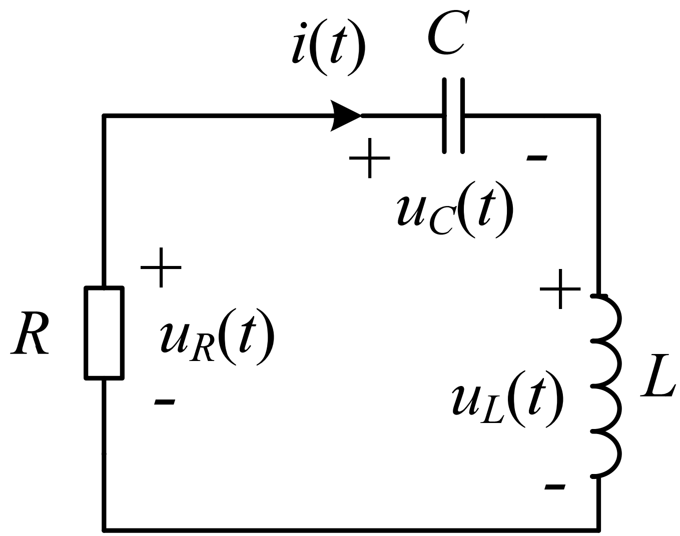
$$u(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

KCL: $$i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = i_s(t)$$

输入-输出方程: $$LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_s(t)$$

5-8 二阶电路零输入响应（RLC串联）



初始条件：

$$u_C(0_+) \quad u_C{}'(0_+) = \frac{1}{C} i(0_+)$$

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0$$

特征根： $s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

特征根的取值依赖于R、L、C的取值，可分三种情形：

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

S1、S2互不相等，均为负实数，过阻尼

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

S1、S2为相等的负实数，临界阻尼

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \Rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

S1、S2互不相等，为共轭复数，欠阻尼

RLC串联三种情形的零输入响应

- 初始条件： $u_C(0_+) = 0 \qquad i(0_+) = I_0$
- 过阻尼

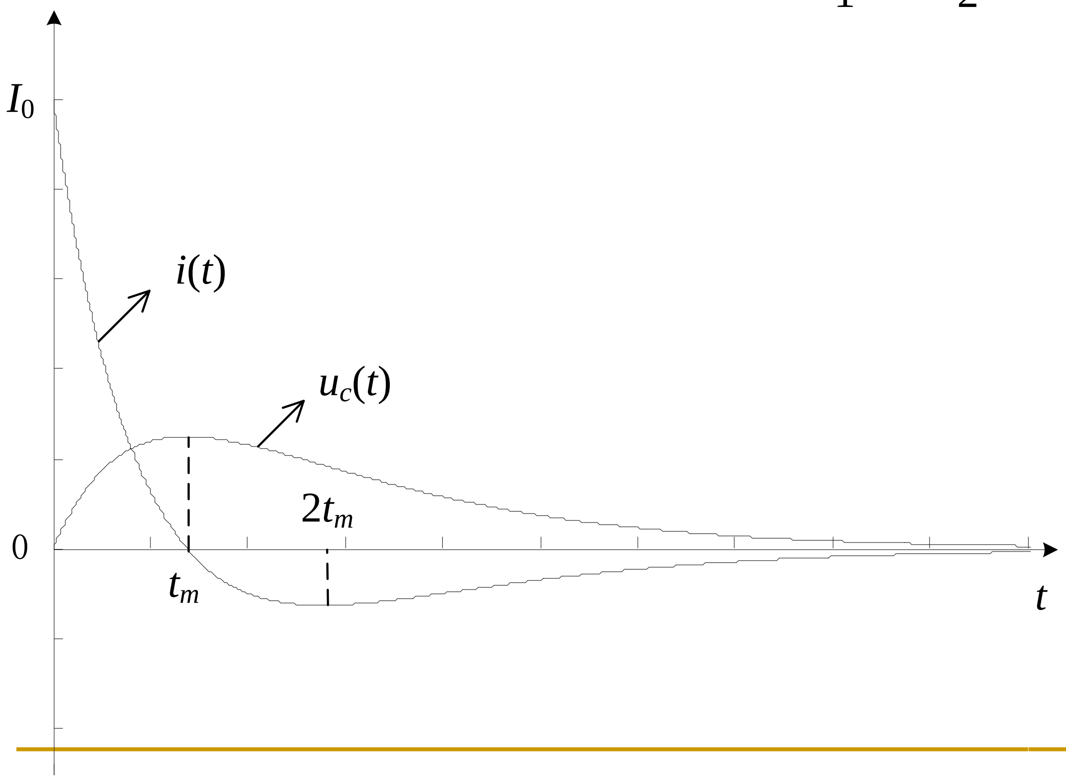
$$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 = 0 \\ i(0_+) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}\bigg|_{t=0_+} = CA_1 s_1 + CA_2 s_2 = I_0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{I_0}{Cs_1 - Cs_2} \qquad A_2 = -\frac{I_0}{Cs_1 - Cs_2}$$

- 零输入响应电压 $u_C(t) = \dfrac{I_0}{Cs_1 - Cs_2}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)\varepsilon(t)$
- 零输入响应电流

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{I_0}{s_1 - s_2}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right)\varepsilon(t)$$



在过阻尼状态下，RLC串联电路中电感元件与电容元件存在能量交互的现象，但交互次数有限，不会出现振荡现象。其主要原因在于，电阻元件取值过大，耗能快。

RLC串联三种情形的零输入响应

- 临界阻尼

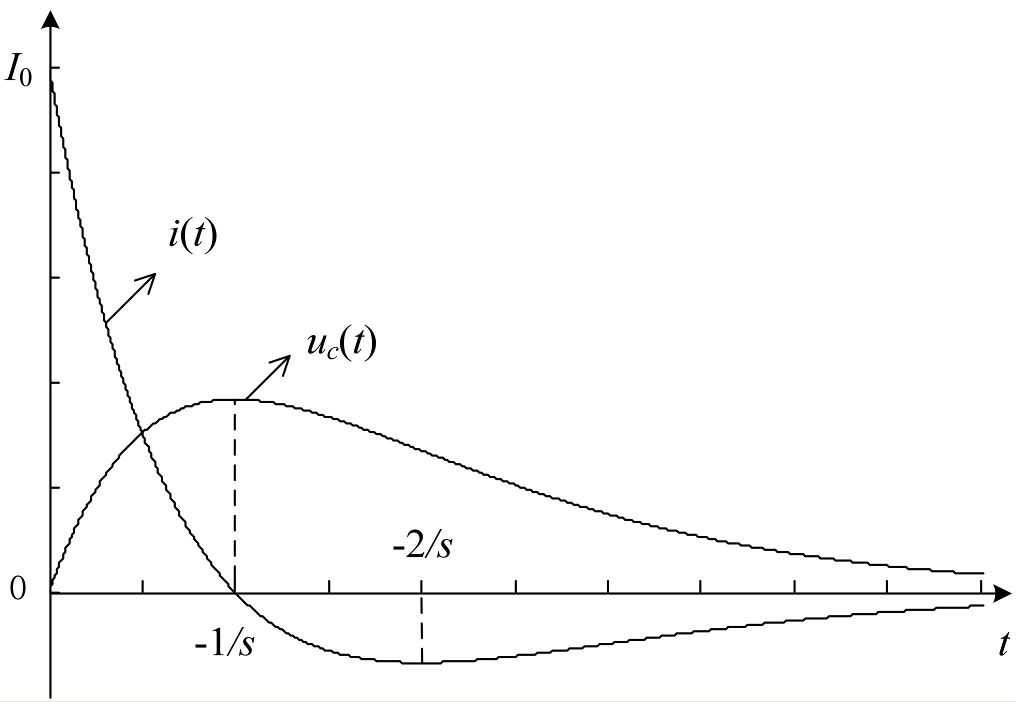
$$u_C(t) = \left(A_1 + A_2 t\right)e^{st}$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 = 0 \\ i(0_+) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0_+} = CA_1 s + CA_2 = I_0 \end{cases}$$

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{I_0}{C}$$

- 零输入响应电压 $u_C(t)=\dfrac{I_0}{C}te^{st}\varepsilon(t)$
- 零输入响应电流

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\left(I_0e^{st}+I_0ste^{st}\right)\varepsilon(t)$$



在临界阻尼状态，RLC串联电路，不会出现振荡现象。电阻元件R取值处于临界值，若电阻值稍小，则电路将进入欠阻尼状态，反之则进入过阻尼状态。

RLC串联三种情形的零输入响应

- 欠阻尼　　$\alpha = -\dfrac{R}{2L}$　　$\omega_d = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$

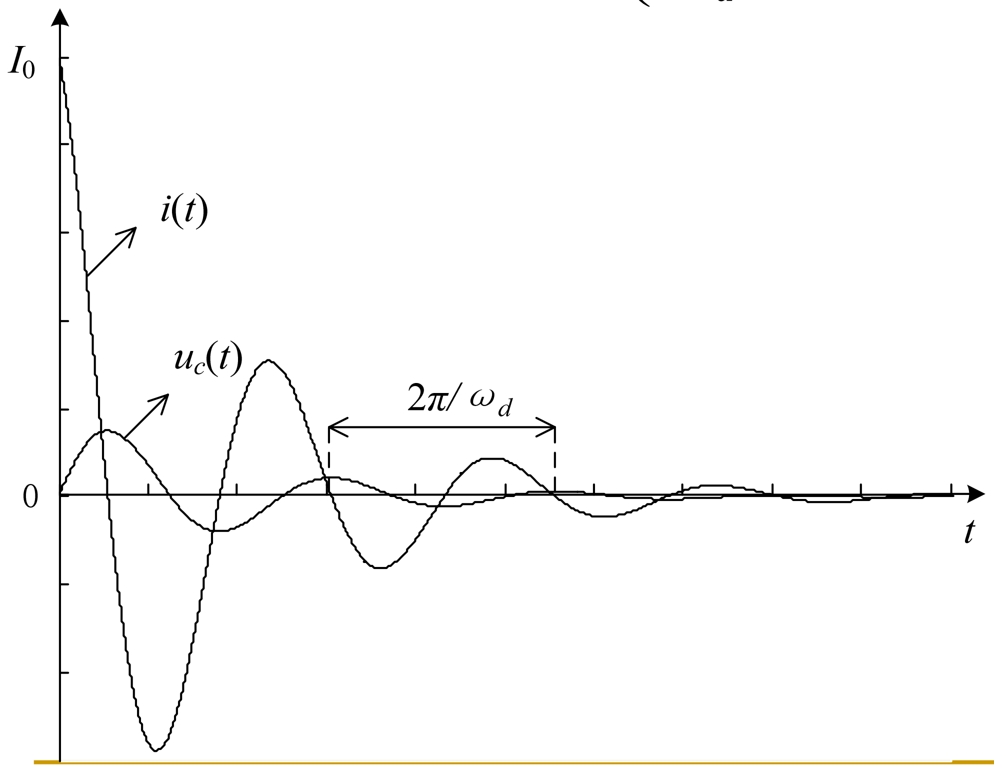
$$u_C(t) = \left[A_1\cos\left(\omega_d t\right) + A_2\sin\left(\omega_d t\right)\right]e^{\alpha t}$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 = 0 \\ i(0_+) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0_+} = CA_1\alpha + CA_2\omega_d = I_0 \end{cases}$$

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{I_0}{C\omega_d}$$

- 零输入响应电压 $u_C(t)=\dfrac{I_0}{C\omega_d}e^{\alpha t}\sin\left(\omega_d t\right)\varepsilon(t)$
- 零输入响应电流

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\left(\frac{\alpha I_0}{\omega_d}e^{\alpha t}\sin\left(\omega_d t\right)+I_0e^{\alpha t}\cos\left(\omega_d t\right)\right)\varepsilon(t)$$

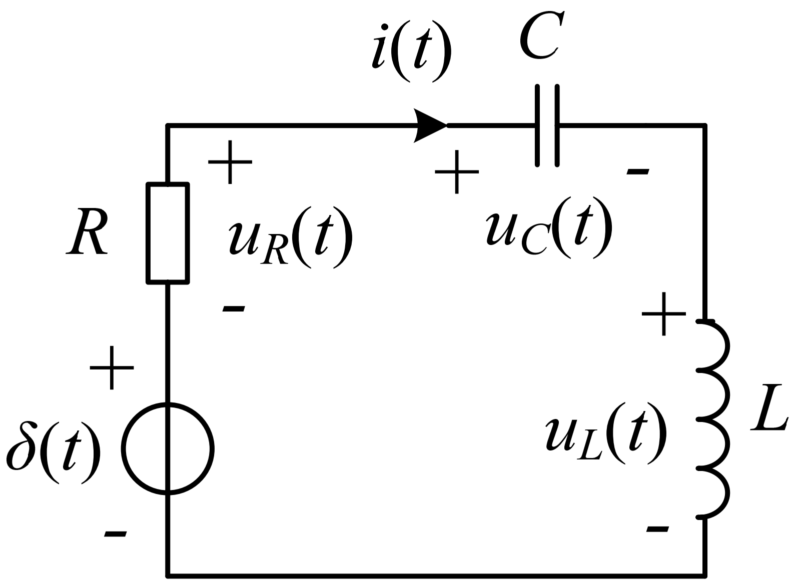


欠阻尼状态下，电容元件与电感元件周期性地交换能量，但由于电阻元件不断消耗能量，二者的储能随时间推移而不断衰减直至全部被电阻元件消耗。出现振荡现象的原因在于电阻元件的阻值较小，耗能较慢。

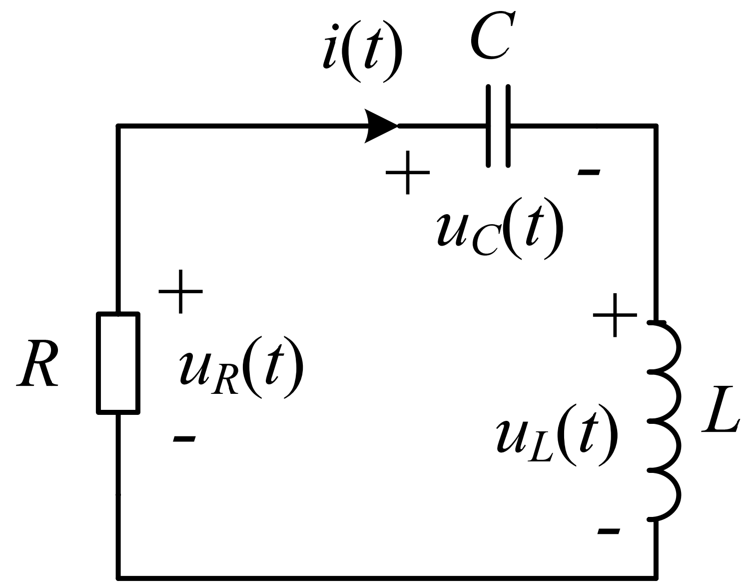
RLC并联电路的零输入响应

- 自学
- 注意与RLC串联电路的对偶性

5-9 二阶电路的冲激响应（RLC串联）



（a）原始电路



（b）0+时刻以后等效电路

$$u_C(0_-)=0 \qquad i(0_-)=0$$

0+时刻，回路电流 $$i(0_+)=i(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=\frac{1}{L}$$

$$u_C(0_+)=0$$

可见，在冲激电压源的作用下电感元件瞬间获得初始能量

RLC串联电路冲激响应

- 0+时刻以后，电路变为零输入状态。后续分析同零输入响应分析。直接给出结果。
- 过阻尼状态

$$u_C(t) = \frac{1}{L\left(Cs_1 - Cs_2\right)}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)\varepsilon(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{L\left(s_1 - s_2\right)}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right)\varepsilon(t)$$

RLC串联电路冲激响应

- 临界阻尼状态

$$u_C(t)=\frac{1}{LC}te^{st}\varepsilon(t)$$

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{1}{L}\left(e^{st}+ste^{st}\right)\varepsilon(t)$$

- 欠阻尼状态

$$u_C(t)=\frac{1}{LC\omega_d}e^{\alpha t}\sin\left(\omega_d t\right)\varepsilon(t)$$

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\left(\frac{\alpha}{L\omega_d}e^{\alpha t}\sin\left(\omega_d t\right)+\frac{1}{L}e^{\alpha t}\cos\left(\omega_d t\right)\right)\varepsilon(t)$$

RLC并联电路冲激响应

- 自学
- 注意与RLC串联电路的对偶性