第二章 电阻电路的分析

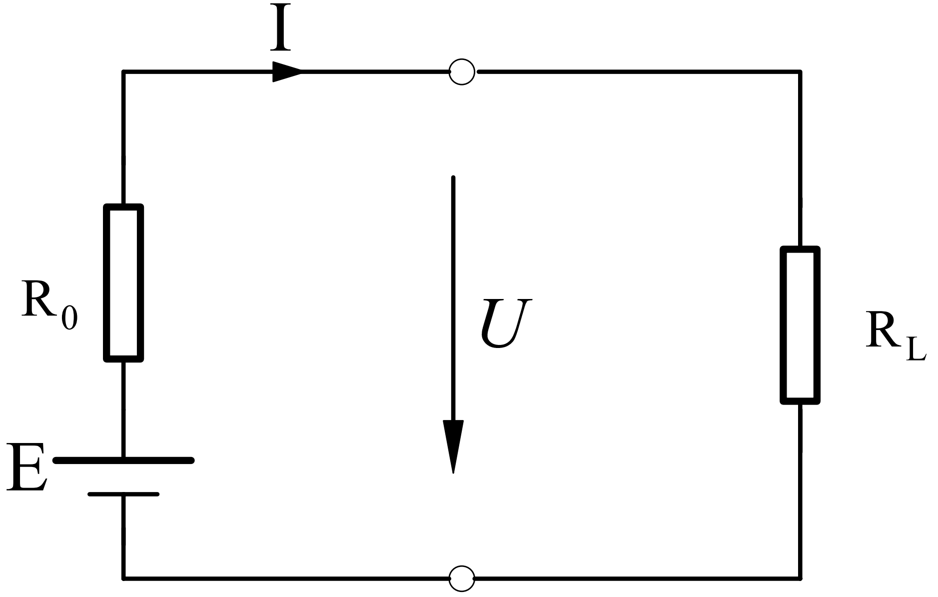
山东大学信息科学与工程学院

内容提要

- 电路的等效变换
- 电阻网络Y—△变换
- 实际电源的等效变换
- 电路的“图”、独立方程数（KVL、KCL）
- 支路分析法
- 回路分析法
- 节点分析法

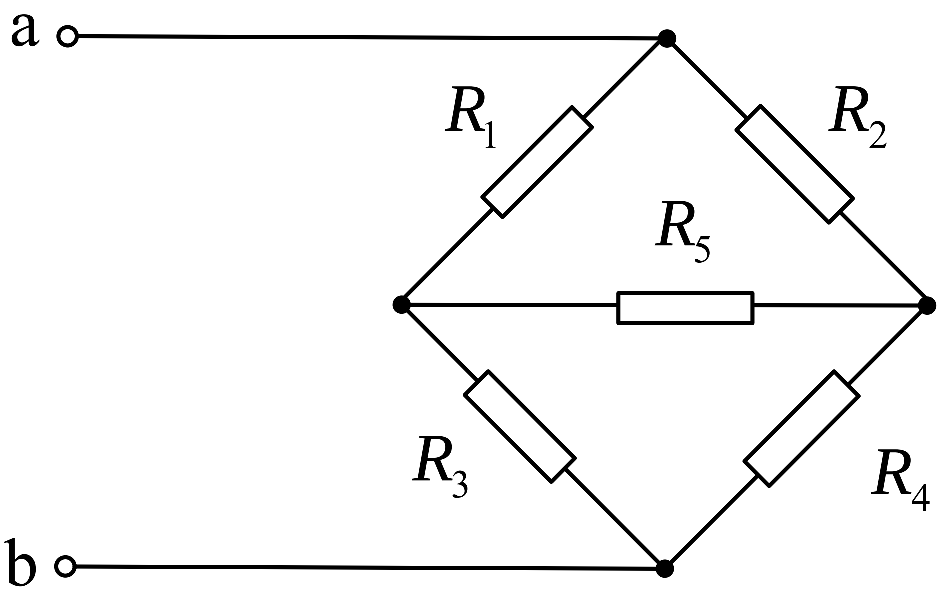
2.1 电路的等效变换

- 简单电路：电路只有一个回路，或能够用串、并联的方法简化为单个回路的电路。（例）



2.1 电路的等效变换

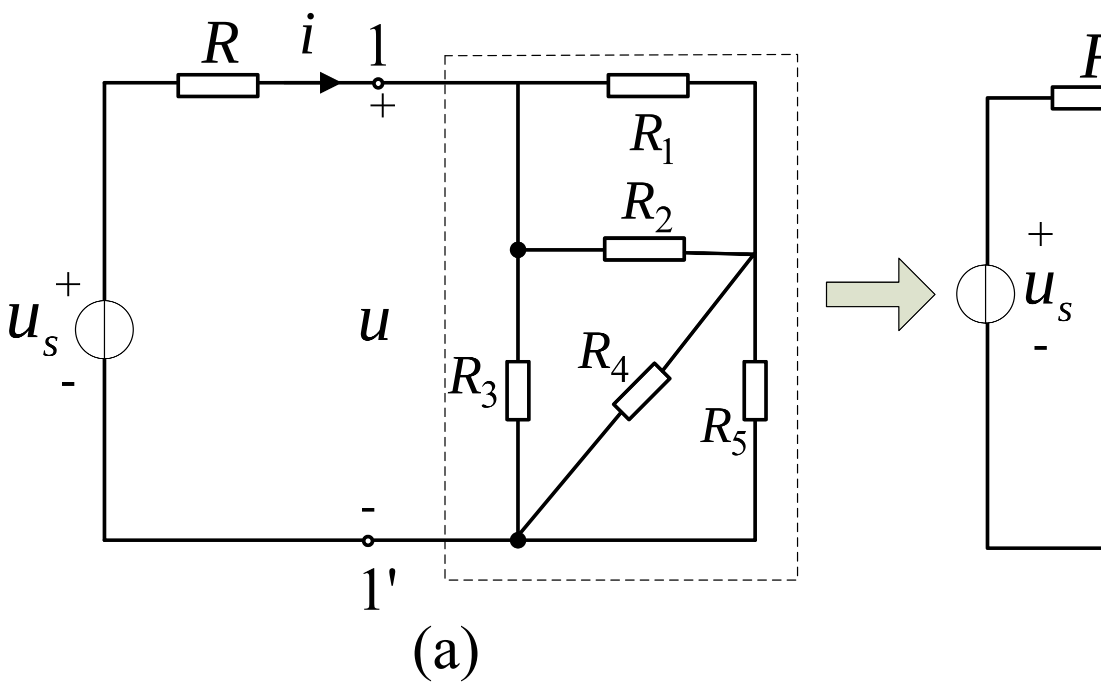
- 复杂电路：不能用串并联方法化简为单回路的多回路电路。



2.1 电路的等效变换

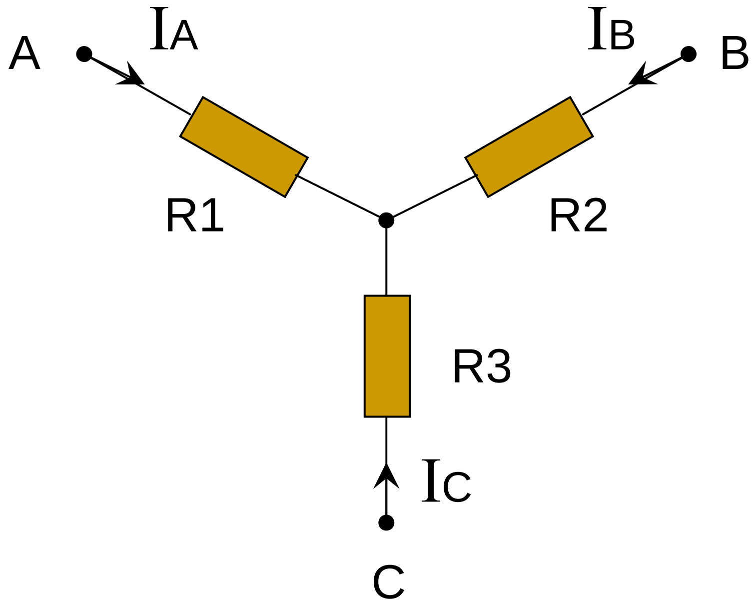
- **线性电路：** 由时不变线性无源元件，线性受控源和独立电源组成的电路，称为时不变线性电路，本书简称线性电路。
- **单口网络：** 只有两个端钮与其他电路相连接的网络，称为二端网络。称为单口（或一端口）网络。
- **多口网络：** 有三个以上端钮与其他电路相连接的网络
- **单口网络的等效性：** 当两个单口网络端口的电压电流关系（VCR关系）完全相同时，称这个单口网络是互相等效的。
- 采用等效单口网络取代原单口网络，不影响外部电路分析结果
- 采用等效变换可以简化电路分析

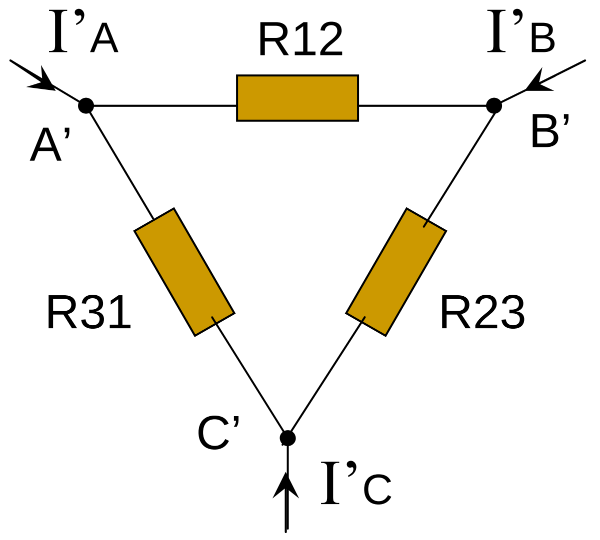
2.1 电路的等效变换



2-2 星形电阻网络与三角形电阻网络的等效变换

- 星形（T型）电阻网络
- 三角形（ π 型）电阻网络





星形电阻网络与三角形电阻网络的等效变换

- 星形网络与三角形网络彼此***等效的意义***
  - 若由两网络的三端流入(或流出)的电流一一对应地分别相等，则三端相互间的电压也一一对应地分别相等；反之亦然。

$$I_A = I'_A \quad I_B = I'_B \quad I_C = I'_C \quad \Longleftrightarrow \quad U_{AB} = U_{A'B'} \quad U_{BC} = U_{B'C'} \quad U_{CA} = U_{C'A'}$$

星形电阻网络与三角形电阻网络的等效变换

- 星形电阻网络与三角形电阻网络的***等效条件***
  - 在两个网络中，当任一对应端(例如C端)开路时，其余的一对对应端(例如A、B两端)间的端口等效电阻必须相等。

$$
\begin{cases}
R_1+R_2=R_{12} \parallel (R_{23}+R_{31}) \\
R_2+R_3=R_{23} \parallel (R_{31}+R_{12}) \\
R_3+R_1=R_{31} \parallel (R_{12}+R_{23})
\end{cases}
$$

联立求解，可得星形网络与三角形网络等效变换关系式。

星形网络与三角形网络等效变换关系

- 三角形 ⇒ 星形：星形网络中的一个电阻，等于三角形网络中联接到对应端点的两邻边电阻之积除以三边电阻之和。

$$\boxed{\text{Y连接电阻} = \frac{\Delta\text{连接相邻电阻的乘积}}{\Delta\text{连接电阻之和}}}$$

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 = \dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$

- 星形 ⇒ 三角形：三角形网络中—边的电阻，等于星形网络中联接到两个对应端点的电阻之和再加上这两个电阻之积除以另一电阻。

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 + \dfrac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} = R_2 + R_3 + \dfrac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{31} = R_1 + R_3 + \dfrac{R_1R_3}{R_2} \end{cases}$$

对称三端网络的等效变换

- 对称星形网络 $$\boxed{R_1 = R_2 = R_3 = R_Y}$$

- 对称三角形网络 $$\boxed{R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta}$$

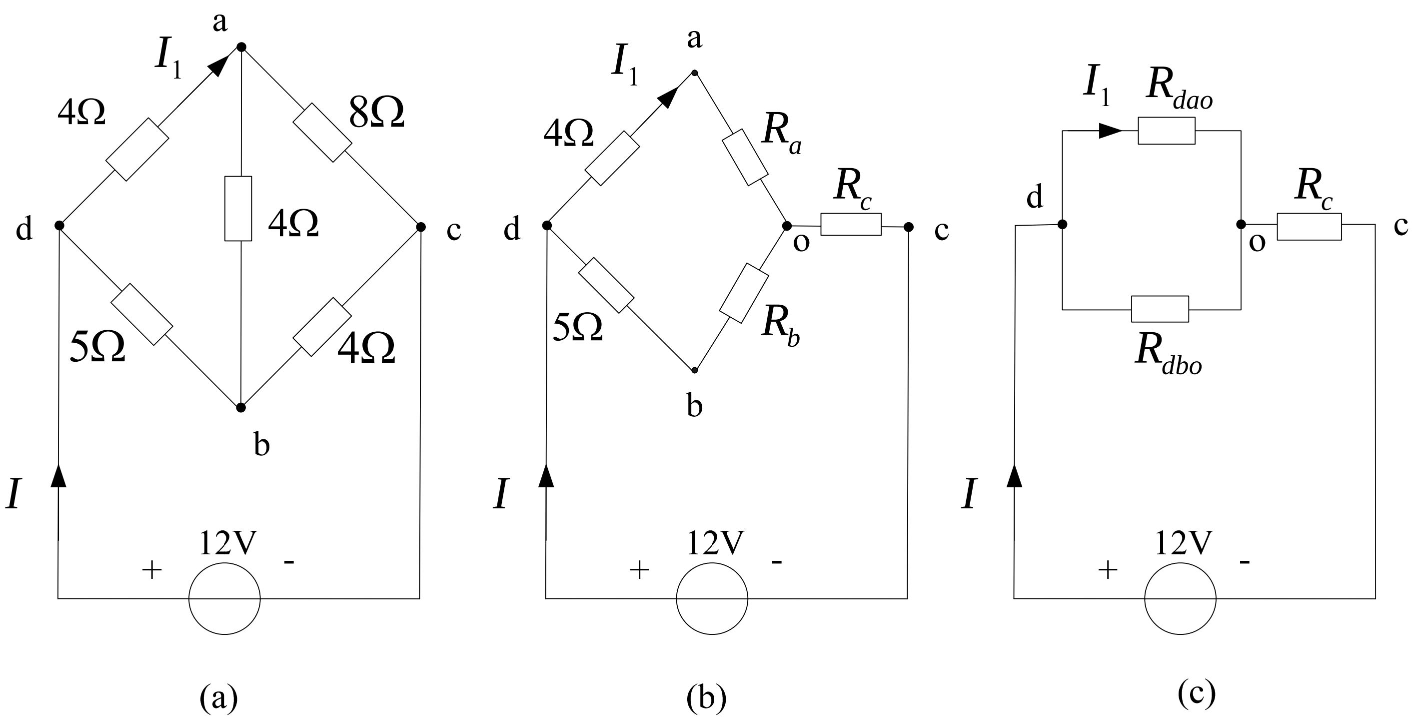
- 等效星形网络与三角形网络的阻值关系

$$\boxed{R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta}$$

$$\boxed{R_\Delta = 3R_Y}$$

应用实例

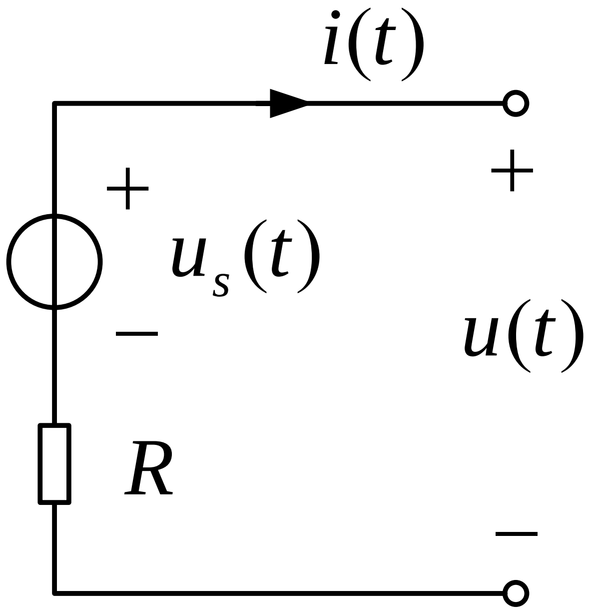
- 求图中支路电流 I = ？

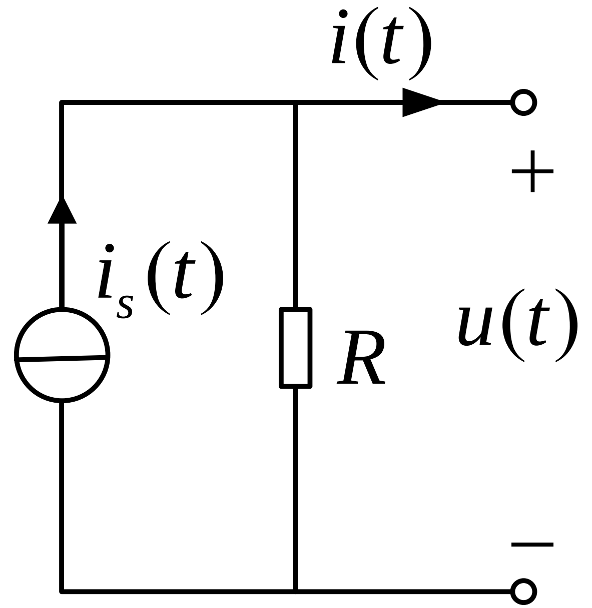


$$R_a = \frac{4\times 8}{4+4+8} = 2\Omega \qquad R_b = \frac{4\times 4}{4+4+8} = 1\Omega \qquad R_c = \frac{8\times 4}{4+4+8} = 2\Omega$$

2.3 实际电源的等效变换

- 实际电源的两种模型及端口U-I特性



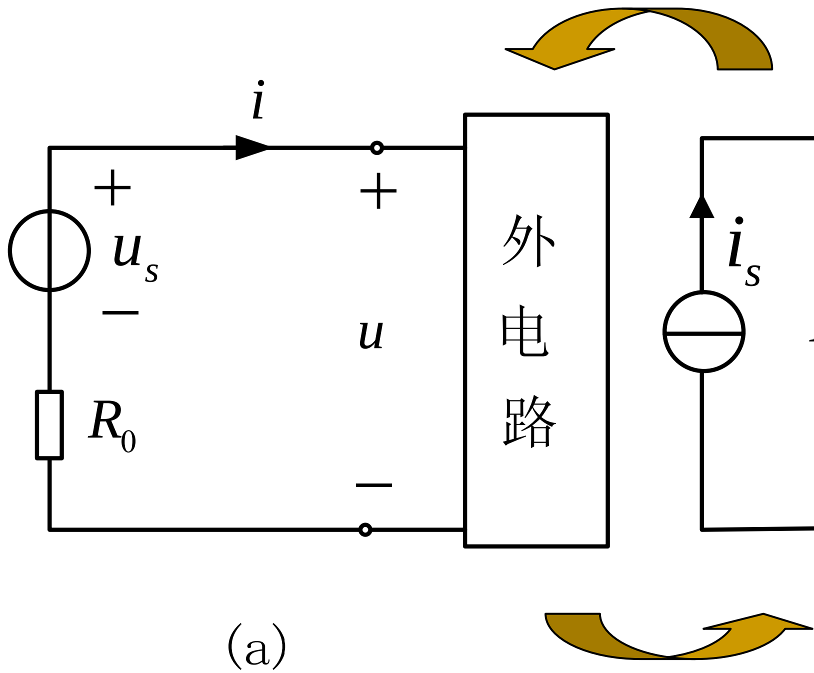


$$u(t) = u_s(t) - Ri(t)$$

$$i(t) = i_s(t) - \frac{u(t)}{R}$$

2.3 实际电源的等效变换

- 实际电源的两种模型对于电路的其余部分而言，是可以等效转换的。
- 两种模型的等效变换



2.3 实际电源的等效变换

- 电压源和电流源等效互换的条件
  - 外部电路获得的端电压或电流相同

电压源 $u(t)=u_s(t)-Ri(t)$

电流源 $i(t)=i_s(t)-\dfrac{u(t)}{R}$ $\Rightarrow$ $u(t)=i_s(t)R-Ri(t)$

二者等效：$u(t)=u_s(t)-Ri(t)=i_s(t)R-Ri(t)$

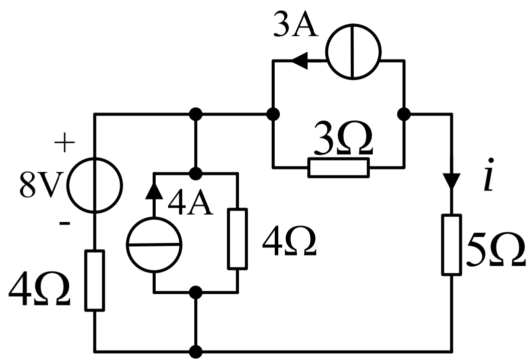
二者等效条件：$\boxed{u_s(t)=i_s(t)R}$ 或 $\boxed{i_s(t)=\dfrac{u_s(t)}{R}}$

保持内阻R不变，利用等效条件，二者可相互转换

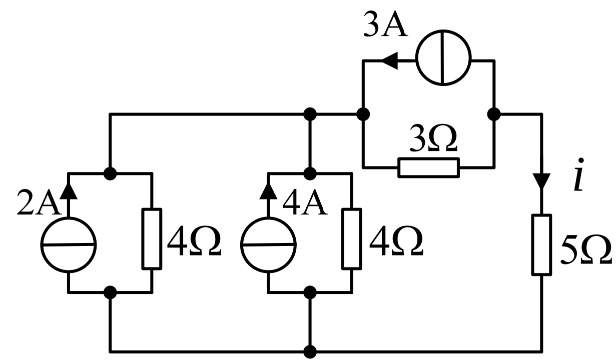
理想电压源和理想电流源是不能等效互换的。

例题

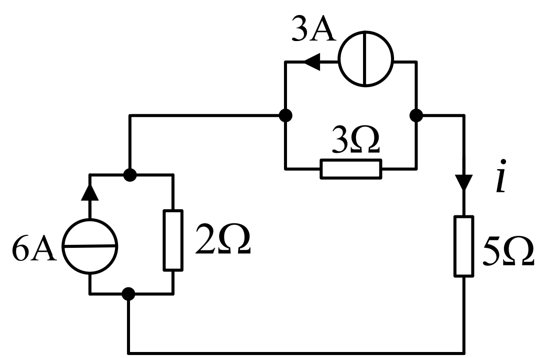
- 求例图所示电路中的电流。



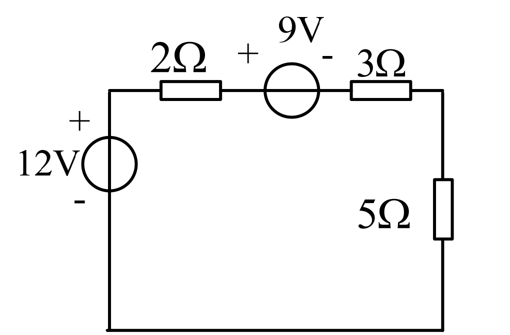
(a)



(b)



(c)



(d)

例题

- 用实际电源的电压源模型和电流源模型的等效变换求图中的电压u。

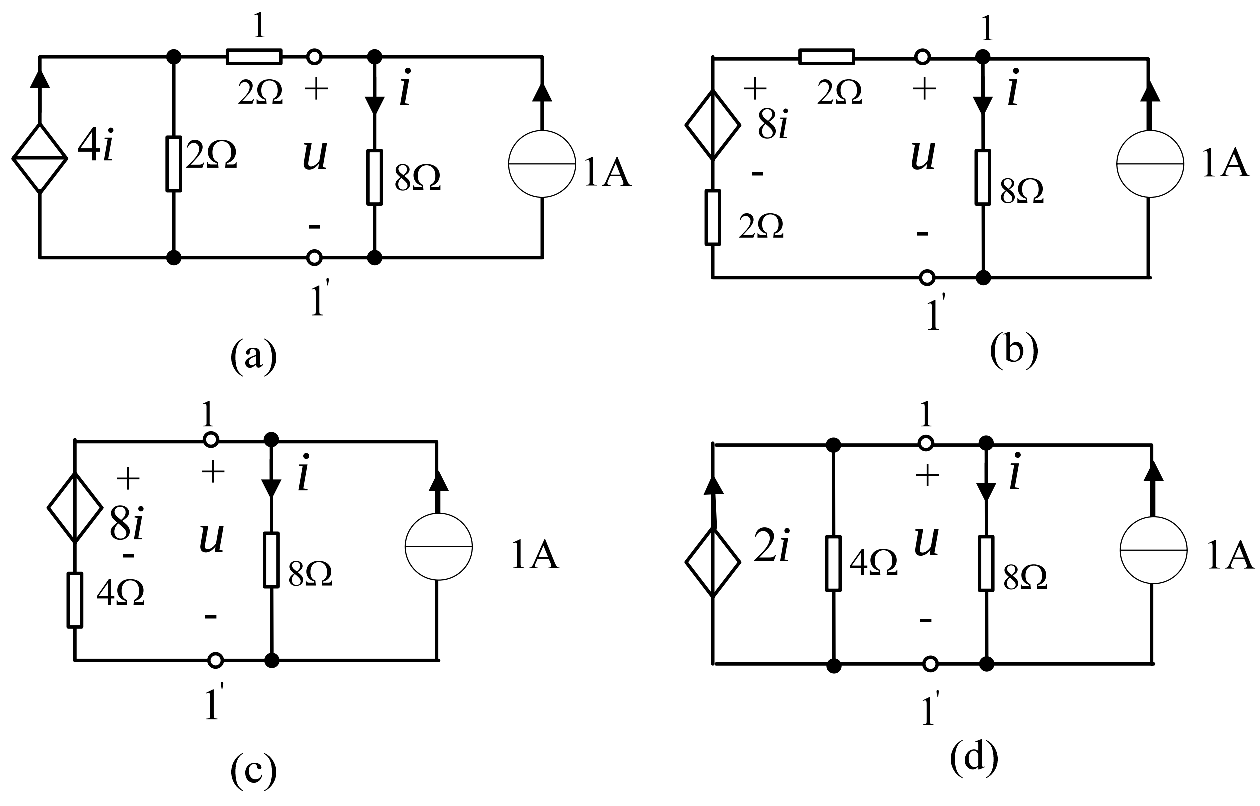


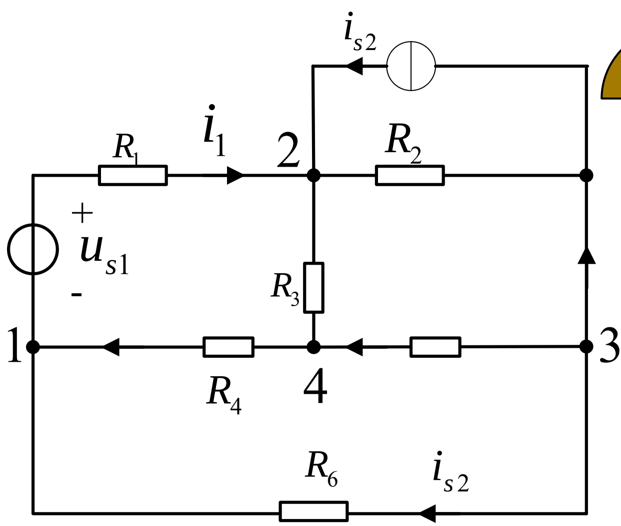
图 2-2-3 例2-2-2 图

2.4 电路的“图”及独立方程数

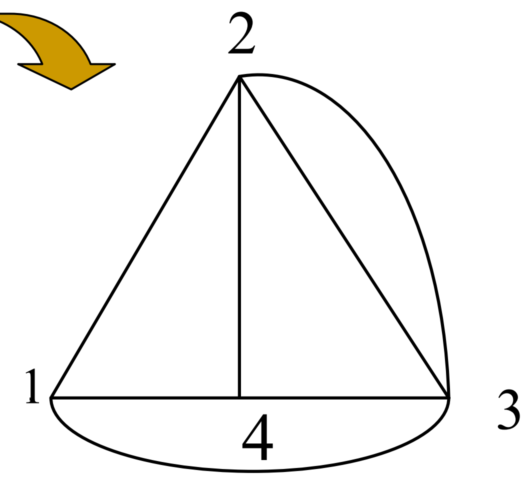
- 电路的“图”与“有向图”
- 电路中独立方程数

电路的“图”与“有向图”

- 电路的“图”：仅考虑连接关系，略去元件属性
  - 仅有节点和支路的集合组成的电路图
  - 节点：概念与前面定义相同，用点表示
  - 支路： 将原支路中元件略去，用线段表示



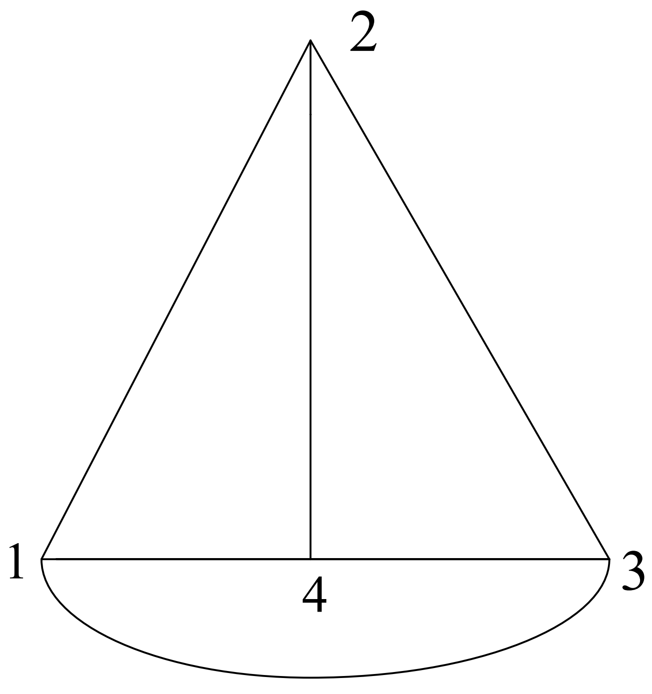
（a）

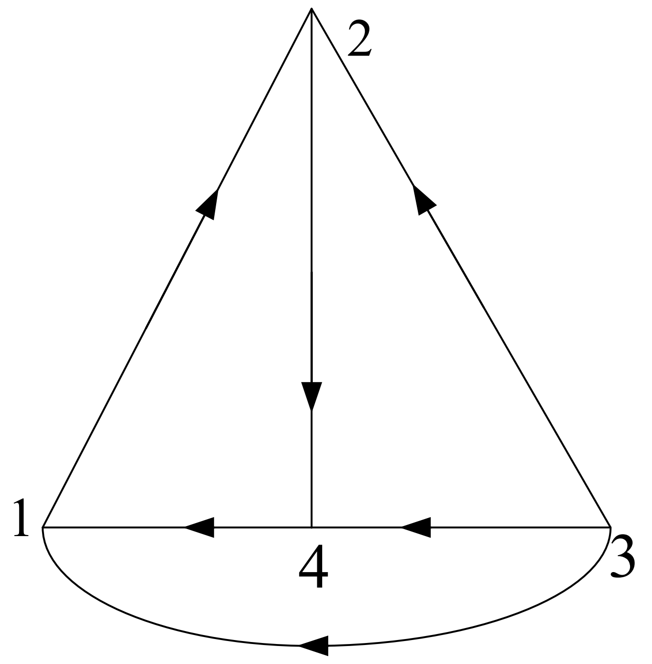


（b）

电路的“图”与“有向图”

- 电路的“有向图”：加上参考方向的“图”





电路的独立方程数

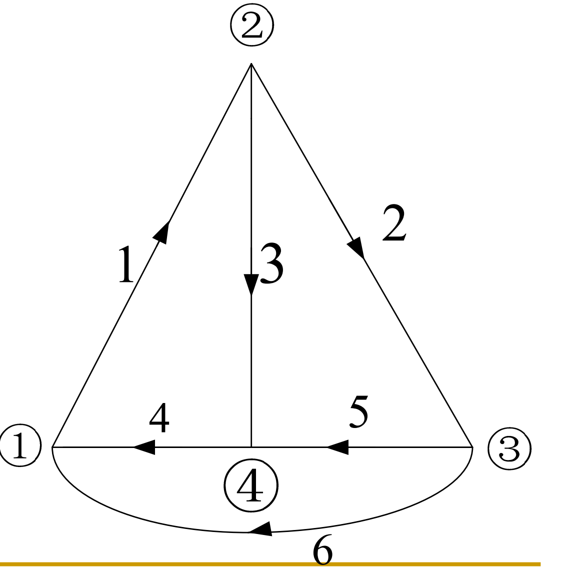
- **KCL的独立方程数**
  - 根据KCL，电路中每个节点可以列一个方程
  - 对于有n个节点的电路，独立节点方程数恒等于节点数减1，即（n-1）个，相应的（n-1）个节点就称为独立节点。有一个节点为参考节点。

节点1 $$i_1 - i_4 - i_6 = 0$$

节点2 $$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

节点3 $$-i_2 + i_5 + i_6 = 0$$

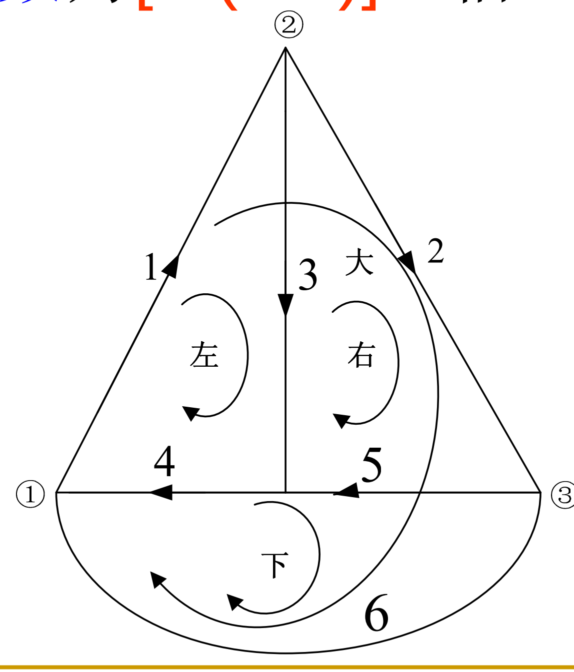
节点4 $$-i_3 + i_4 - i_5 = 0$$



每一个方程都能由其余3 个方程得到，即4个方程中只有3个方程是彼此独立的

电路的独立方程数

- **KVL的独立方程数**
  - 根据KVL，电路中每个回路可列出一个方程
  - 对于具有b条支路n个节点的电路，应用基尔霍夫电压定律所能得到的独立回路方程数为[b-(n-1)]。恰好等于一个平面电路的网孔数。
- 独立回路
  - 一个回路所包含的支路中至少有一条不包含在其他回路中。



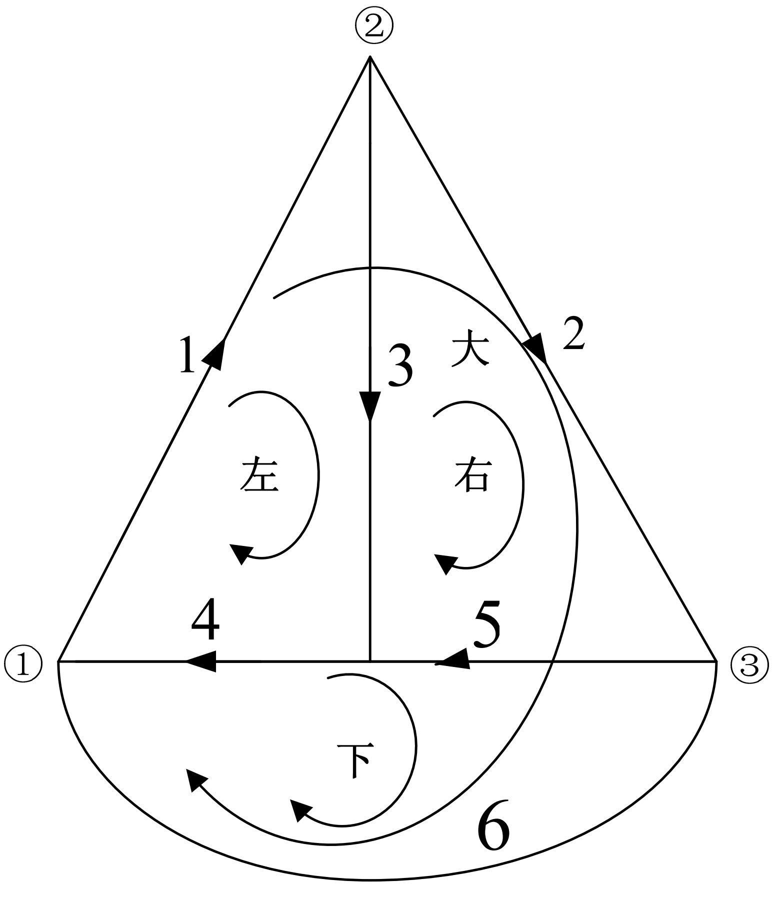
例题

回路左 $u_1+u_3+u_4=0$

回路右 $u_2+u_5-u_3=0$

回路下 $-u_4-u_5+u_6=0$

外圈回路 $u_1+u_2+u_6=0$



只有3个独立回路方程

电路的独立方程数

- 综上可见：根据KCL和KVL所列出的独立方程数恰好等于支路数，即（n-1）+[b-(n-1)]=b
- 电路分析的一般方法
  - b条支路的电路，仅需b个独立方程求得支路电压或支路电流
  - 根据电路图，选择独立节点，根据KCL列出方程
  - 根据电路图，选择独立回路，根据KVL列出方程
  - 对b个独立方程联立求解求得电压或电流
  - 根据元件U-I关系，求出另一个变量
  - 根据电压、电流分析功率

2-5 支路分析法

- 2b法
- 支路电流法
- 支路电压法

2b法

- 2b法
  - 一个含有b条支路的电路，当以支路电压和支路电流为求解变量时，共有2b个未知量，需用2b个联立方程来反映它们的全部约束关系。
- 如何得到2b个独立方程？
  - 利用KCL / KVL可得到b个独立方程
  - 根据每个支路的VCR方程得到b个独立方程

支路电流法

- 支路电流法
  - 以支路电流为求解变量的支路分析法。
- 一般分析方法
  - 以KCL为依据列出独立节点方程
  - 以KVL和元件VCR为依据列出独立回路方程
  - 联立求解，得各支路电流
  - 再根据元件性质求得支路电压和功率

例题

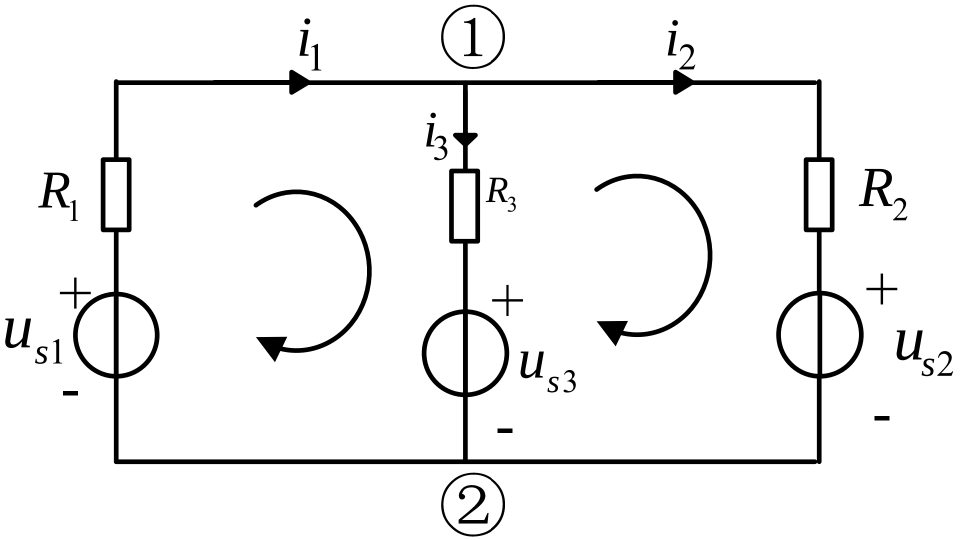
- 电路含1个独立节点，2个独立回路
- 以节点2为参考节点，列出节点1的KCL方程

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

- 列出2个回路的KVL方程

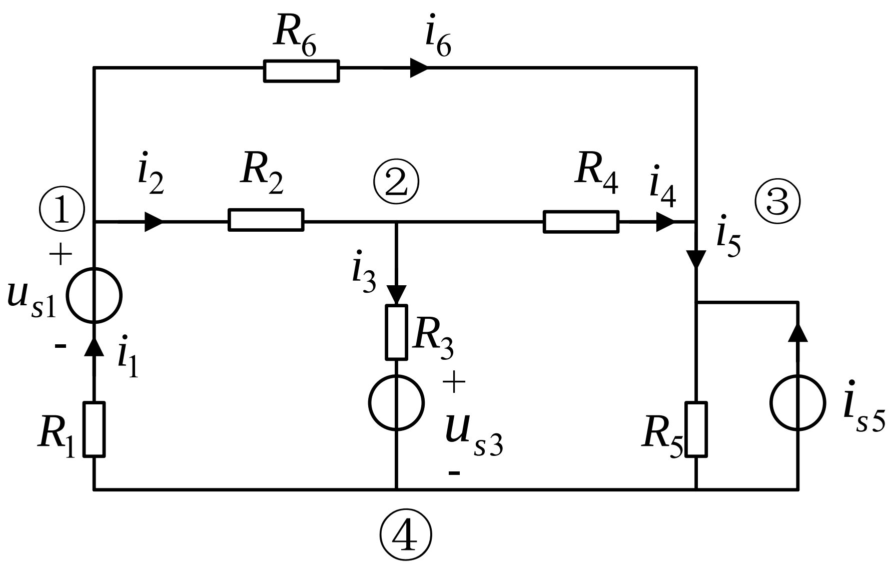
$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = u_{s1} - u_{s3}$$

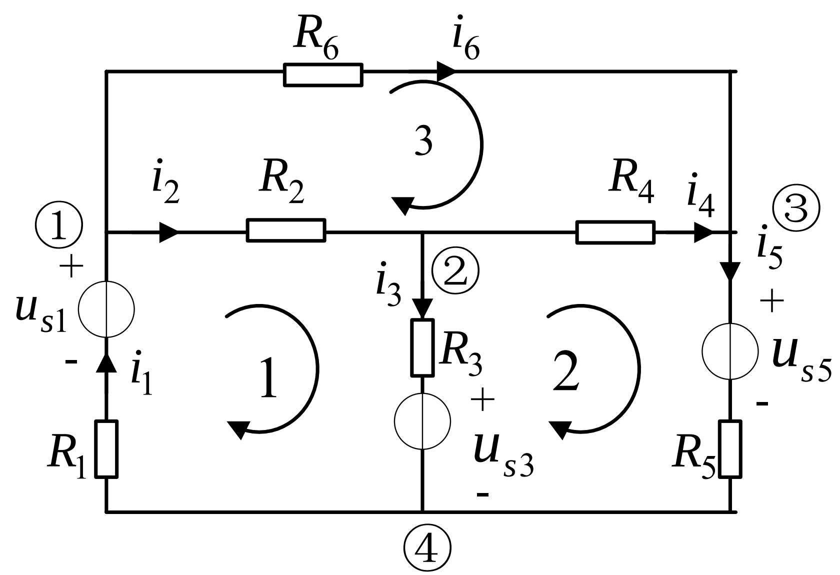
$$R_2 i_2 - R_3 i_3 = u_{s3} - u_{s2}$$



例题

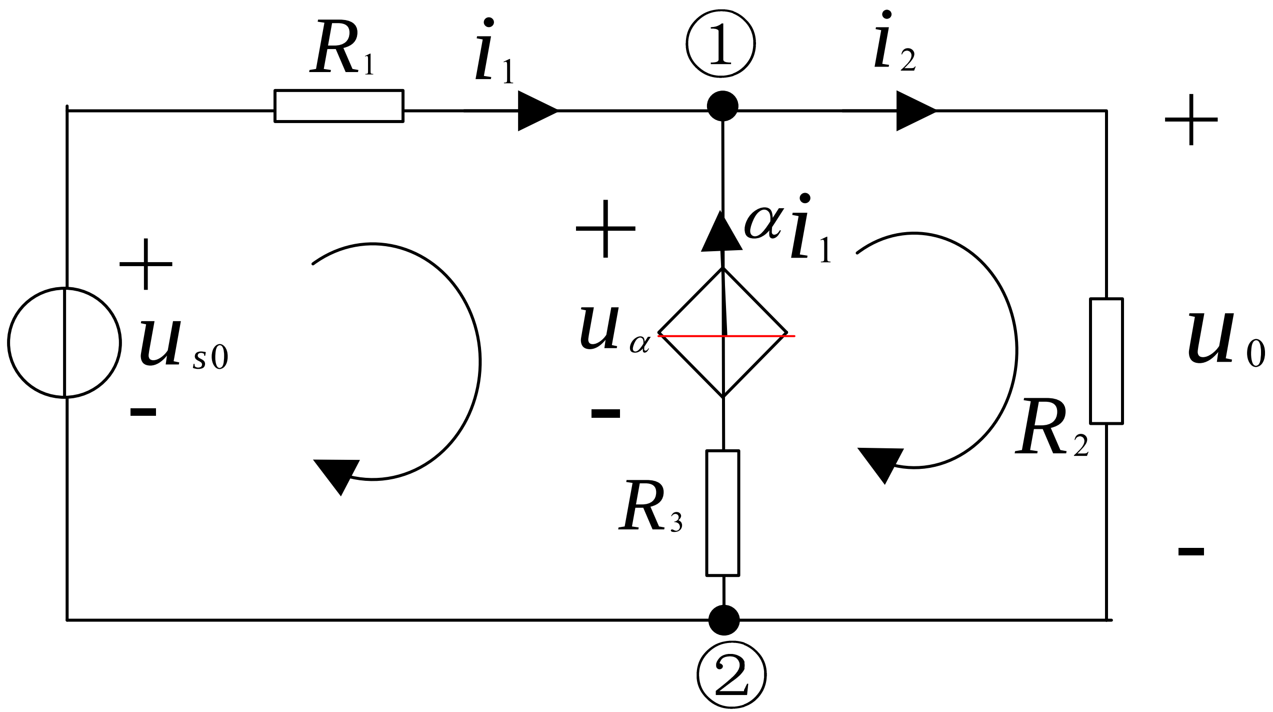
用支路电流法求解例图中各支路的电流。





例题

- 用支路电流法求解例图中各支路电流

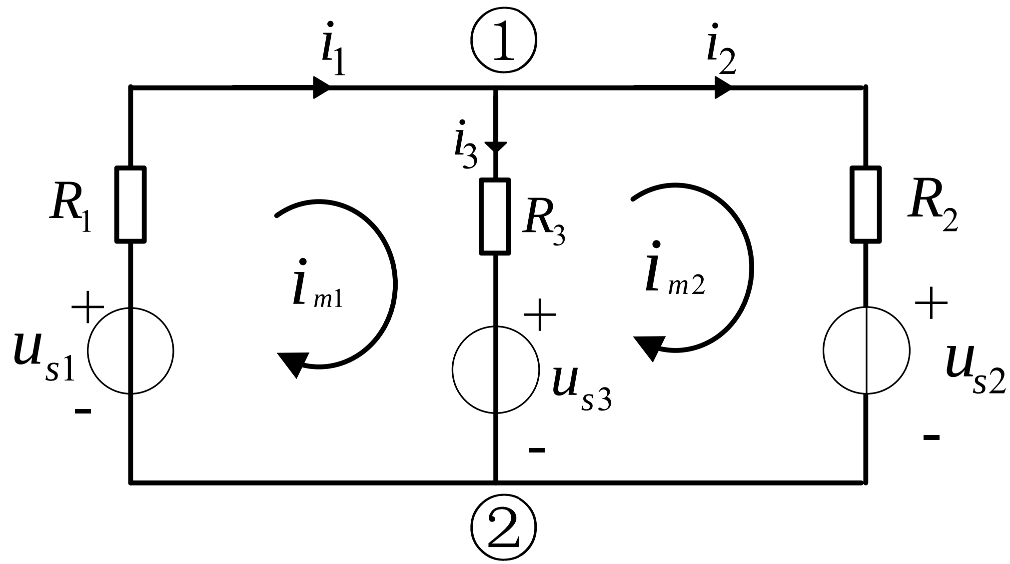


支路电压法

- 支路电压法
  - 以支路电压为求解变量的支路分析法。
- 一般分析方法
  - 以KCL为依据列出独立节点方程
  - 以KVL和元件VCR为依据列出独立回路方程
  - 联立求解，得各支路电压
  - 再根据元件性质求得支路电流和功率
- 小结
  - 支路电流法和支路电压法区别仅在于待求变量

2-6 回路分析法

- 回路分析法的基本指导思想：用未知的“回路电流”代替未知的“支路电流”来建立电路方程，以减少联立方程的元数（等于“独立回路数”）。
- 宜用于回路少的电路。



$$i_{m1} = i_1 \qquad i_{m2} = i_2 \qquad i_3 = i_{m1} - i_{m2}$$

2-6 回路分析法

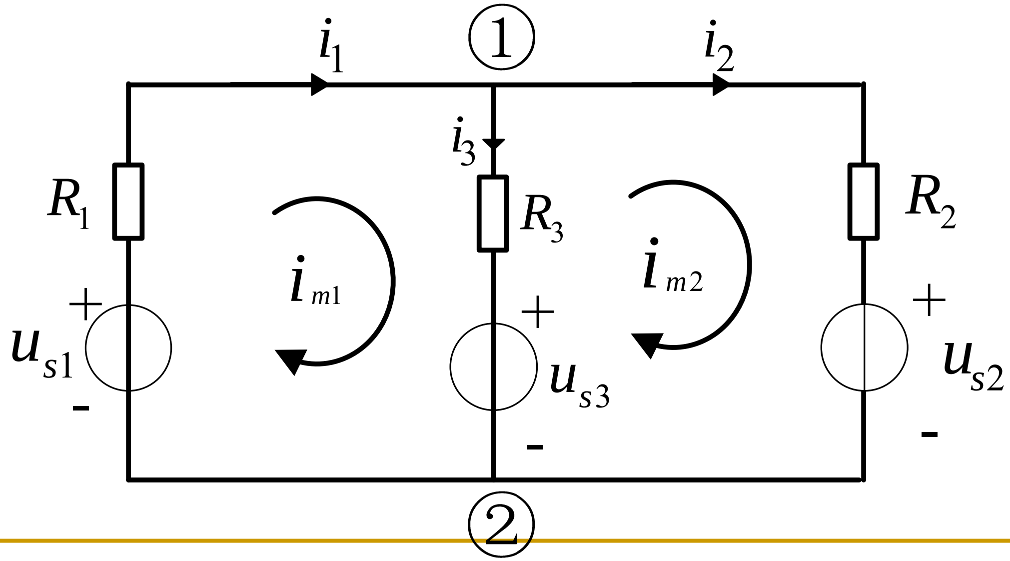
- 术语
  - 回路
  - 回路电流：假想的存在于某个回路的电流，如 i_{m1}, i_{m2}
  - 回路电流的参考方向：顺时针 / 逆时针
  - 回路电流与支路电流关系

$$i_{m1} = i_1 \qquad i_{m2} = i_2 \qquad i_3 = i_{m1} - i_{m2}$$

  - 独立回路：至少有一条支路有别于已选定的回路。
  - 独立回路数：对于平面电路，独立回路数等于网孔数。
- 独立回路的选择
  - "网孔分析法"：直接选择网孔作为独立回路。
  - 根据电路结构灵活选择，以方便计算为目标。

2-6 回路分析法

- 回路分析法的步骤
  - 选定独立回路，设定回路电流参考方向及各支路参考方向
  - 对独立回路建立回路电压方程，联立求解回路电流
  - 利用回路电流分析各支路电流/电压



2-6 回路分析法

$$\left.\begin{aligned}&\text{左回路：}\ R_1 i_{m1}+R_3(i_{m1}-i_{m2})=u_{s1}-u_{s3}\\&\text{右回路：}\ R_2 i_{m2}+R_3(i_{m2}-i_{m1})=u_{s3}-u_{s2}\end{aligned}\right\}\ \text{回路电压方程}$$

整理

$$\left.\begin{aligned}&(R_1+R_3)i_{m1}-R_3 i_{m2}=u_{s1}-u_{s3}\\&-R_3 i_{m1}+(R_2+R_3)i_{m2}=u_{s3}-u_{s2}\end{aligned}\right\}\ \text{回路电压方程}$$

规范化

$$\left.\begin{aligned}&R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}=u_{s11}\\&R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}=u_{s22}\end{aligned}\right\}\ \text{回路电压方程}$$

回路自电阻（回路电流流过的所有电阻之和，恒正）

回路间互电阻（两个回路共有的电阻，若两回路电流参考方向一致，为负值，否则，为正值）

2-6 回路分析法

- 一般电路的规范化回路电压方程

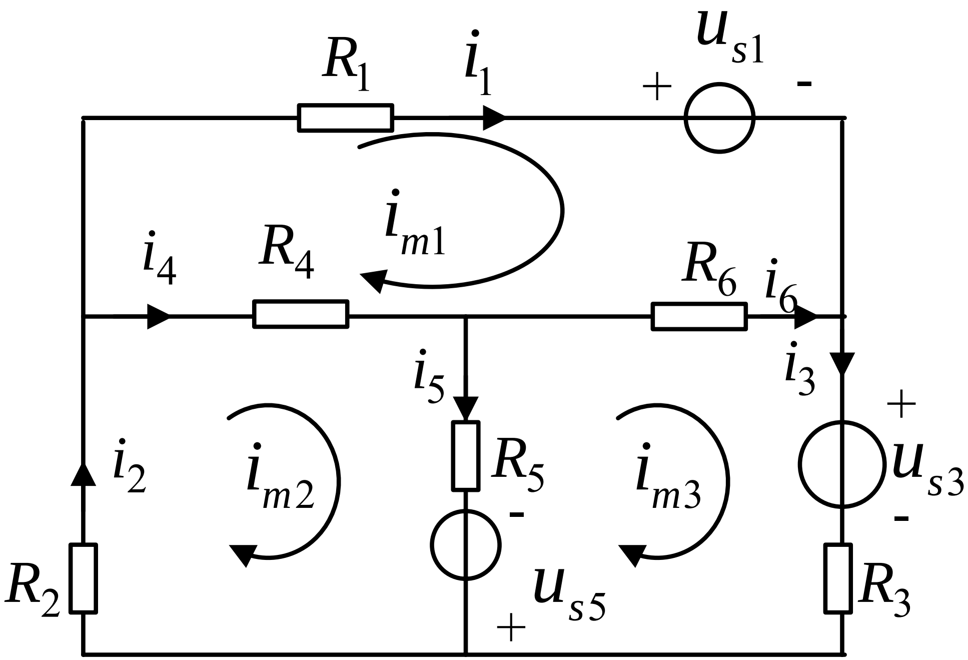
$$\left.\begin{array}{l}R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+\cdots\cdots+R_{1m}i_{mm}=u_{s11}\\R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+\cdots\cdots+R_{2m}i_{mm}=u_{s22}\\\cdots\cdots\\R_{m1}i_{m1}+R_{m2}i_{m2}+\cdots\cdots+R_{mm}i_{mm}=u_{smm}\end{array}\right\}$$

R_{kk} 回路自电阻恒为正

R_{ik} 回路间互电阻：若两回路电流方向一致（均为顺/逆时针）为负值，否则为正。

例题：“网孔法”

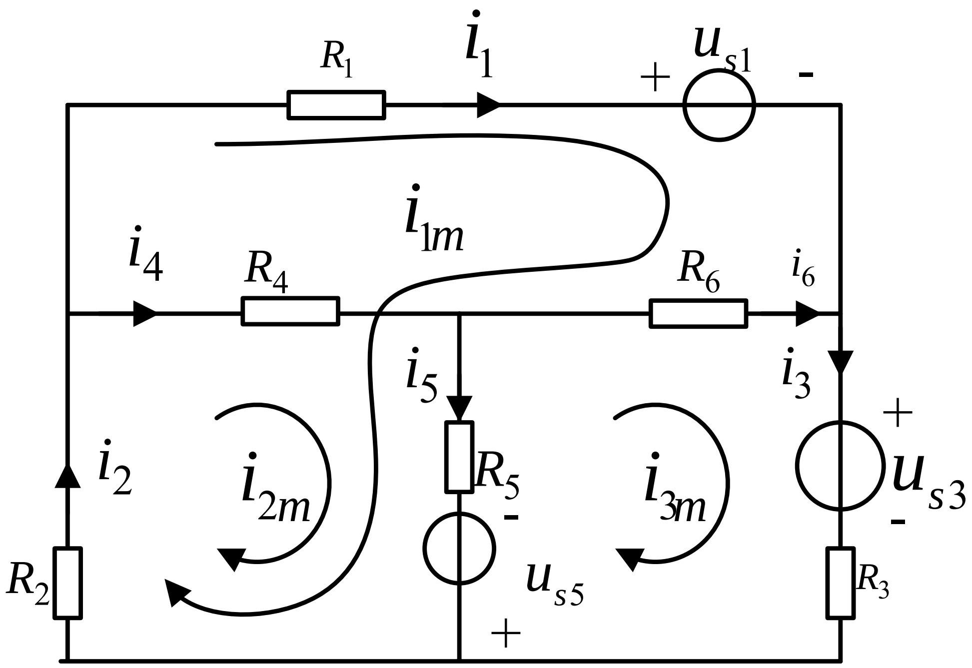
网孔方程：
$$\begin{cases} (R_1+R_4+R_6)i_{m1}-R_4 i_{m2}-R_6 i_{m3}=-u_{s1} \\ -R_4 i_{m1}+(R_2+R_4+R_5)i_{m2}=u_{s5} \\ -R_6 i_{m1}-R_5 i_{m2}+(R_3+R_5+R_6)i_{m3}=-u_{s5}-u_{s3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} i_1=i_{m1} \\ i_2=i_{m2} \\ i_3=i_{m3} \\ i_4=i_{m2}-i_{m1} \\ i_5=i_{m2}-i_{m3} \\ i_6=i_{m3}-i_{m1} \end{cases}$$

例题：一般方法

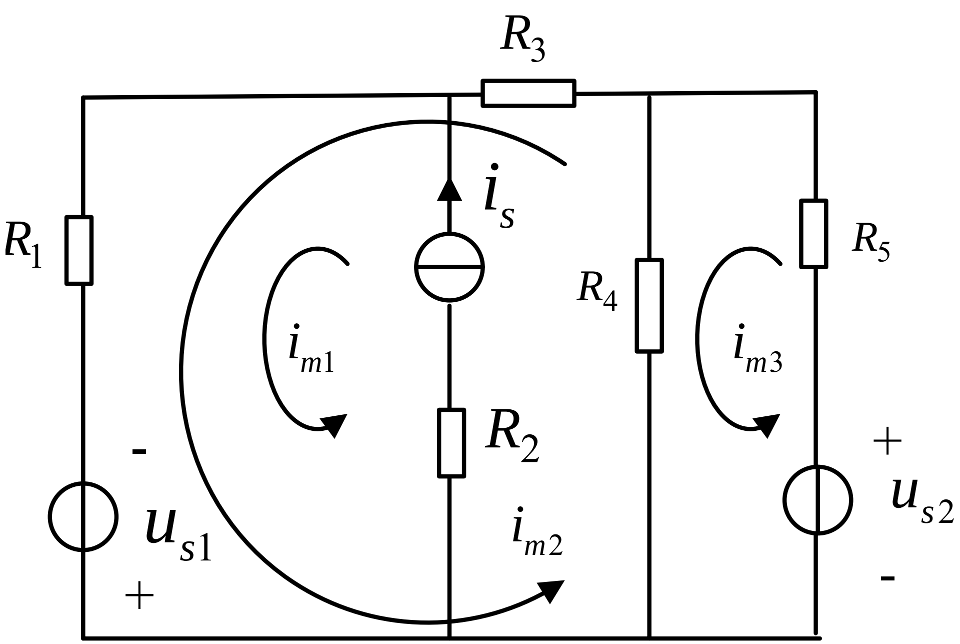
回路方程：$\begin{cases} (R_1+R_2+R_5+R_6)i_{1m}+(R_2+R_5)i_{2m}-(R_5+R_6)i_{3m}=-u_{s1}+u_{s5} \\ (R_2+R_5)i_1+(R_2+R_4+R_5)i_2-R_5 i_3=u_{s5} \\ -(R_5+R_6)i_1-R_5 i_2+(R_3+R_5+R_6)i_3=-u_{s5}-u_{s3} \end{cases}$



$$\begin{cases} i_1=i_{m1} \\ i_2=i_{m1}+i_{m2} \\ i_3=i_{m3} \\ i_4=i_{m2} \\ i_5=i_{m1}+i_{m2}-i_{m3} \\ i_6=i_{m3}-i_{m1} \end{cases}$$

回路分析法技巧

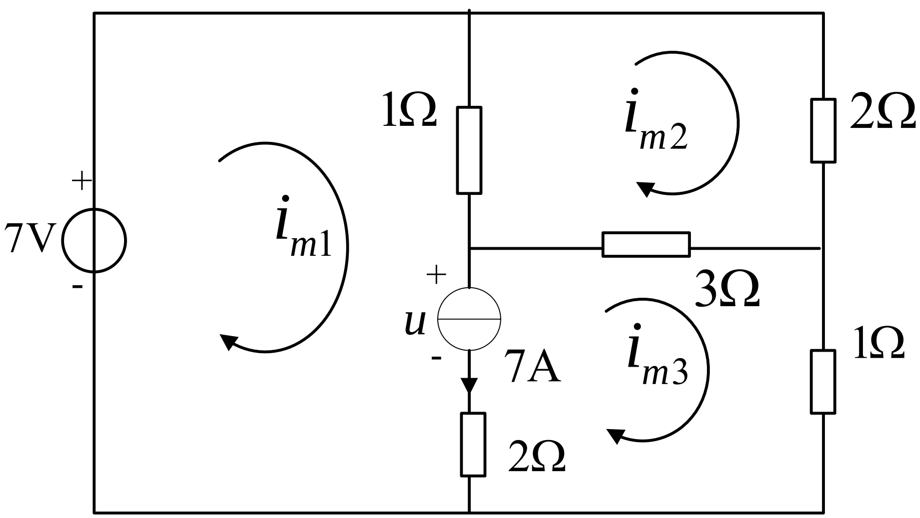
- **含有电流源的电路**
  - 选取回路时只让一个回路电流通过含有电流源的支路



$$\begin{cases} i_{m1} = i_s \\ R_1 i_{m1} + (R_1 + R_3 + R_4) i_{m2} = u_{s1} \\ -R_4 i_{m2} + (R_4 + R_5) i_{m3} = u_{s2} \end{cases}$$

回路分析法技巧

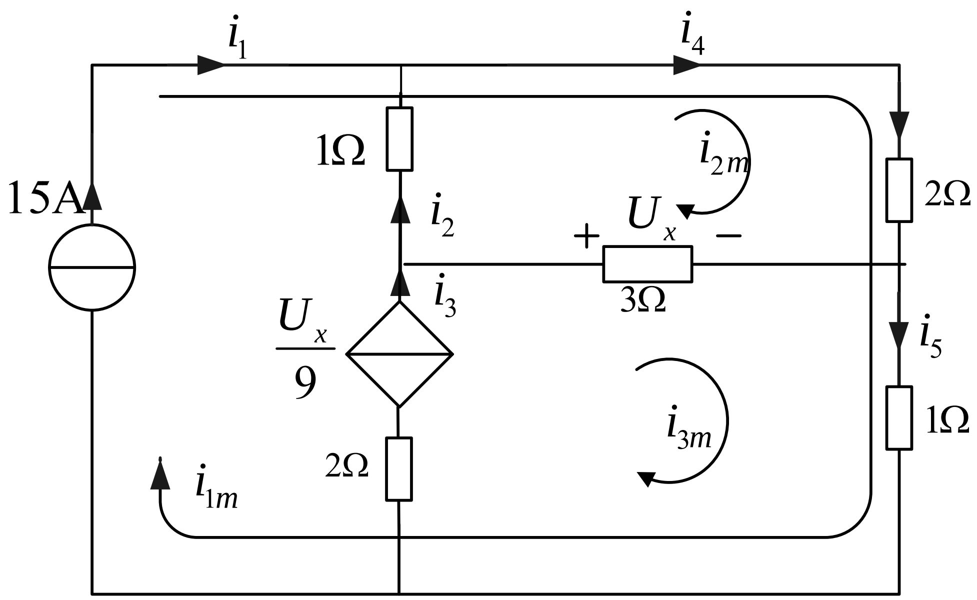
- **含有电流源的电路**
  - 把电流源的电压u设为变量。



$$
\begin{cases}
(1+2)i_{m1} - i_{m2} - 2i_{m3} = 7 - u \\
-i_{m1} + (1+2+3)i_{m2} - 3i_{m3} = 0 \\
-2i_{m1} - 3i_{m2} + (1+2+3)i_{m3} = u \\
i_{m1} - i_{m3} = 7
\end{cases}
$$

回路分析法技巧

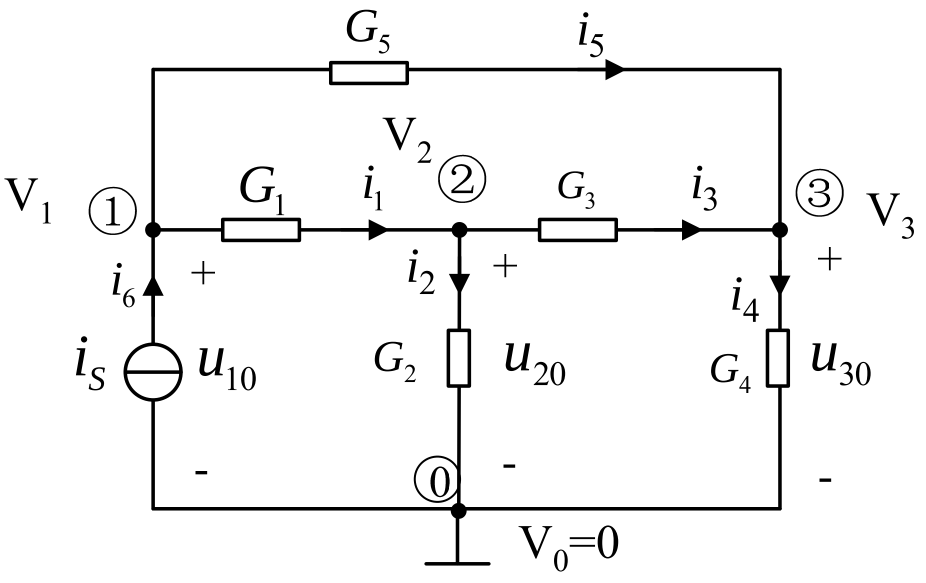
- 含有受控源的电路
  - 含有受控电压源。首先把受控源当独立电压源处理，列出回路方程，再把受控源的控制量用回路电流表示以减少未知量的个数。
  - 含有受控电流源。与独立电流源一样处理，再利用受控电流源与其所涉及的回路电流的关系列联立方程。

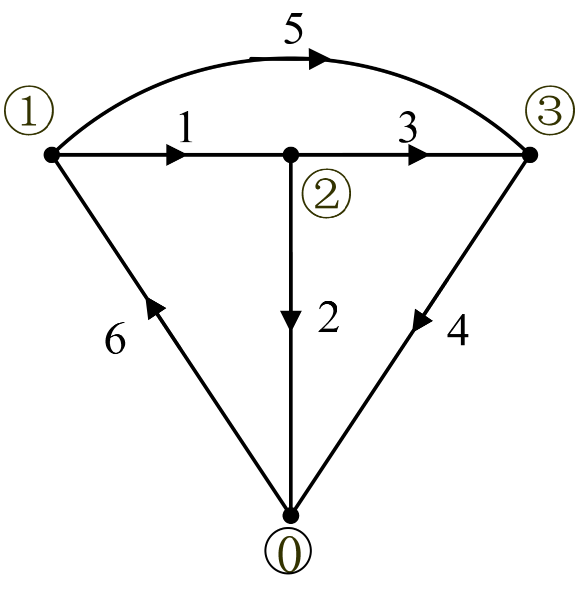


$$
\begin{cases}
i_{m1} = 15 \\
2i_{m1} + (1+2+3)i_{m2} - 3i_{m3} = 0 \\
i_{m3} = U_x / 9 \\
U_x = 3(i_{m3} - i_{m2})
\end{cases}
$$

2-7 节点分析法

- 节点分析法的基本指导思想：用未知的“节点电压”代替未知的“支路电压”来建立电路方程，以减少联立方程的元数（等于“独立节点数”）。
- 宜用于节点少而支路多的电路。





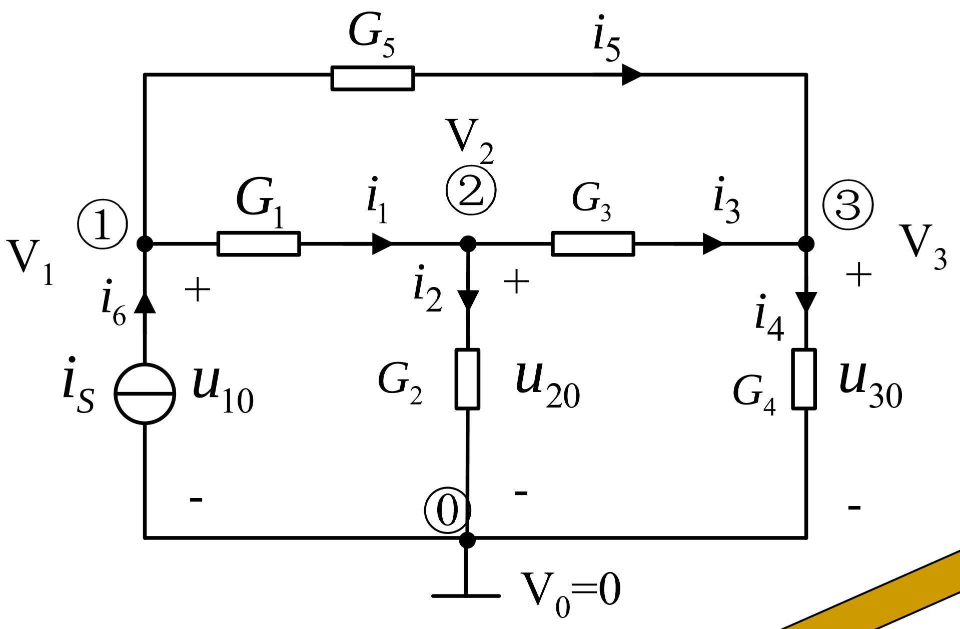
2-7 节点分析法

- 术语&约束关系
  - 参考节点：在电路中选取的某个节点，通常令其参考电位为0（接地点）。
  - 独立节点：除参考节点以外的所有节点均为独立节点。
  - 独立节点数 = 节点数 - 1
  - 节点电压：任意独立节点与参考节点的电位差。
  - 节点电压与支路电压关系（看图）

2-7 节点分析法

- 节点分析法步骤
  - 选定参考节点
  - 设定独立节点电压及各支路参考方向
  - 对独立节点建立节点电流方程，用节点电压表示各支路电流，联立求解节点电压
  - 利用节点电压分析各支路电压/电流

2-7 节点分析法



支路电流与节点电压关系

$$
\left.\begin{aligned}
i_1 &= G_1(v_1 - v_2) \\
i_2 &= G_2 v_2 \\
i_3 &= G_3(v_2 - v_3) \\
i_4 &= G_4 v_3 \\
i_5 &= G_5(v_1 - v_3)
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
i_1 + i_5 - i_S &= 0 \\
-i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\
-i_3 + i_4 - i_5 &= 0
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\left.\begin{aligned}
(G_1 + G_5)v_1 - G_1 v_2 - G_5 v_3 &= i_S \\
-G_1 v_1 + (G_1 + G_2 + G_3)v_2 - G_3 v_3 &= 0 \\
-G_5 v_1 - G_3 v_2 + (G_3 + G_4 + G_5)v_3 &= 0
\end{aligned}\right\}
$$

节点电流方程

2-7 节点分析法

规范化节点电流方程（与回路分析法有强烈对偶性）

$$\left.\begin{aligned} G_{11}v_1+G_{12}v_2+G_{13}v_3&=i_{S11}\\ G_{21}v_1+G_{22}v_2+G_{23}v_3&=i_{S22}\\ G_{31}v_1+G_{32}v_2+G_{33}v_3&=i_{S33}\end{aligned}\right\}$$

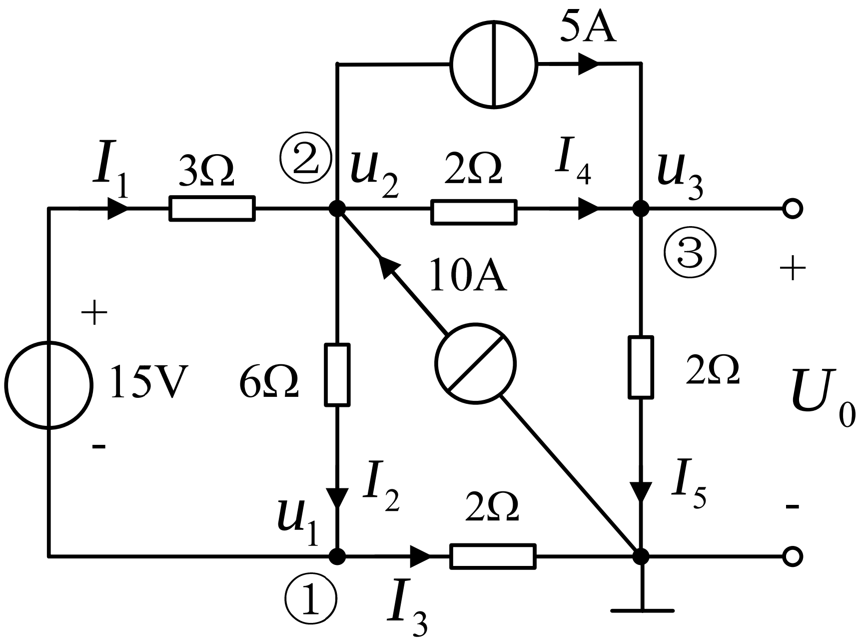
节点的自电导（恒为正）：G_{11},G_{22},G_{33}

节点间互电导（恒为负）：$G_{12},G_{13},\ldots$

流入节点的电流源代数和：$i_{S11},i_{S22},\ldots$

例题

- 用节点电压法求电路中各支路电流及输出电压U_0。

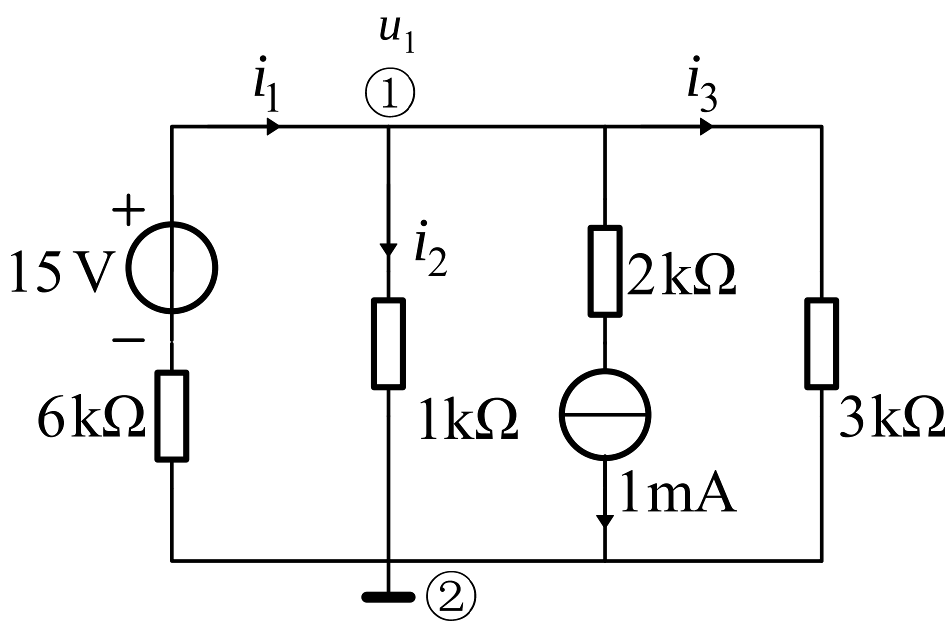


$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_2=-\frac{15}{3} \\ -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_2-\frac{1}{2}u_3=\frac{15}{3}-5+10 \\ -\frac{1}{2}u_2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)u_3=5 \end{cases}$$

$$u_1=5 \qquad u_2=20 \qquad u_3=15$$

例题

- 用节点电压法求电路中各未知的支路电流。



$$i_1 = \frac{15-u_1}{6} = 2.33\ \text{mA}$$

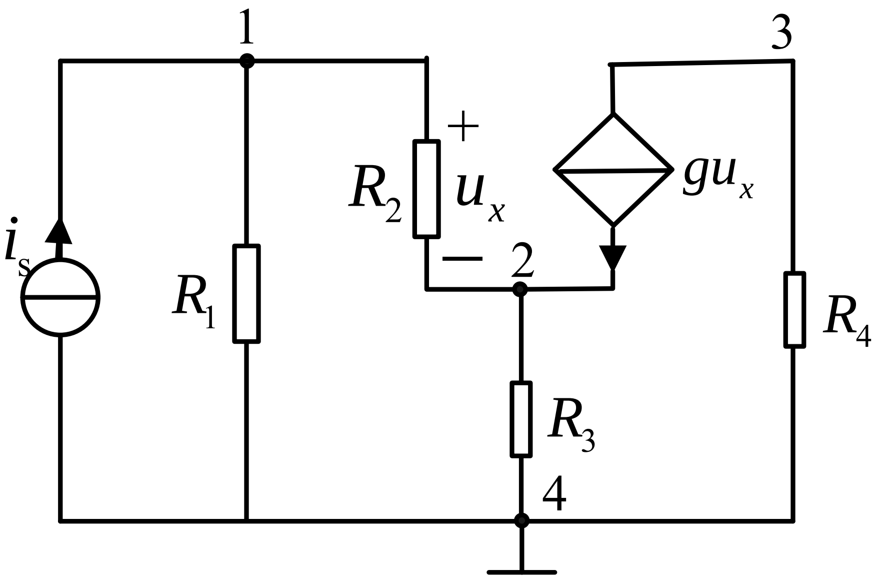
$$i_2 = \frac{u_1}{1\times10^3} = 1\ \text{mA}$$

$$i_3 = \frac{u_1}{3\times10^3}\ 0.33\ \text{mA}$$

$$u_1\left(\frac{1}{6\times10^3}+\frac{1}{1\times10^3}+\frac{1}{3\times10^3}\right) = \frac{15}{6\times10^3} - 1\times10^{-3} \Rightarrow u_1 = 1\ \text{V}$$

例题

- 试列出电路的节点方程



$$
\left\{
\begin{aligned}
&\text{节点1：}\quad \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_1 - \frac{1}{R_2}u_2 = i_s \\
&\text{节点2：}\quad -\frac{1}{R_2}u_1 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_2 = gu_x \\
&\text{节点3：}\quad \frac{1}{R_4}u_3 = -gu_x
\end{aligned}
\right.
$$

$$u_x = u_1 - u_2$$

回路分析法与节点分析法小结

	节点法	回路法
1.求解对象	节点电压	回路电流
2.求解依据	KCL	KVL
3.适用范围	平面、非平面电路、节点较少	平面、非平面电路、回路较少
4.求解方法	列节点电压的电流方程	列回路电流的电压方程
左边	自电导：总为“正”	自电阻：总为“正”
	互电导：为“负”假定节点电压为正	互电阻：通过互电阻的回路电流方向相反为“负”相同为“正”
右边	流向节点电流源电流的代数和	各回路电压源电压升的代数和
5.	据节点电压求支路电流	据回路电流求支路电压