第六节　　函数图形的描绘

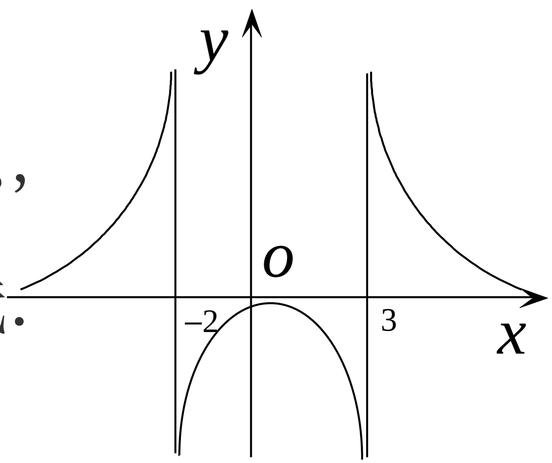
一、渐近线

定义 如果曲线$y=f(x)$上的动点 P沿着曲线移向无穷点时，如果点P 到某定直线 L 的距离趋于零，那么，直线 L 就称为曲线$y=f(x)$的一条**渐近线**.

1. 铅直渐近线

如果$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$那么，

$x=x_0$就是$y=f(x)$的一条铅直渐近线.



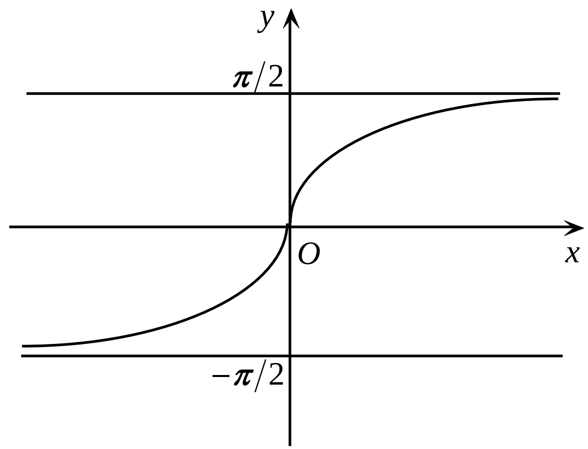
例如 $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$

有铅直渐近线两条：$x=-2,\quad x=3.$

2. 水平渐近线

如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$（$b$为常数）那么，$y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如$y=\arctan x$，有水平渐近线两条：$y=\dfrac{\pi}{2}$，$\quad y=-\dfrac{\pi}{2}$.



3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

（a,b 为常数）那么， $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

斜渐近线求法：若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$. 那么

$y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

例1 求 $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$ 渐近线.

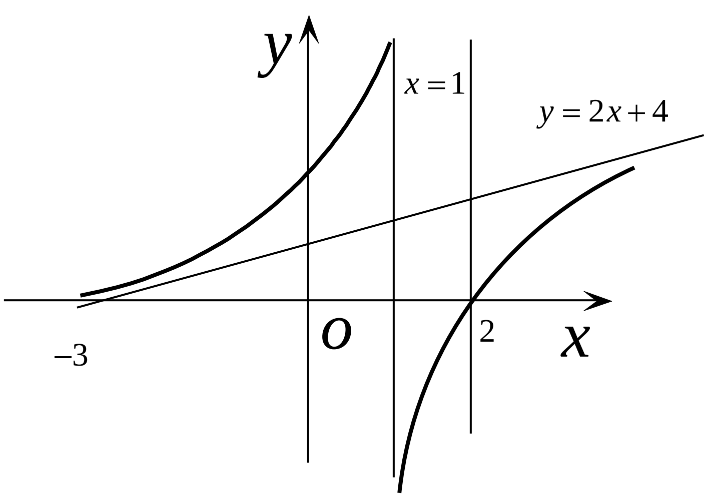
解： 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$. 所以 $x=1$ 为铅直渐近线.

又由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)}=2$,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)(x+3)-2x(x-1)}{x-1}=4.$$

所以 $y=2x+4$ 为斜渐近线.



二、图形描绘的步骤

由于连续可导函数的一阶、二阶导数反映了函数在相应区间上函数的特征，因此利用函数特性描绘函数图形的一般步骤为：

第一步 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论, 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

第二步 求出方程 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根同函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间;

第三步 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性与极值及曲线的凹凸与拐点(可列表进行讨论)；

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势;

第五步 描出与方程 $f'(x)=0$和 $f''(x)=0$的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形.

三、作图举例

例2 作出函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解： $D: x\neq 0,$ 非奇非偶函数, 且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\quad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

由 $f'(x)=0.$ 得 $x=-2.$； $f''(x)=0.$ 得 $x=-3$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2]=-2$ 得水平渐近线 $y=-2;$

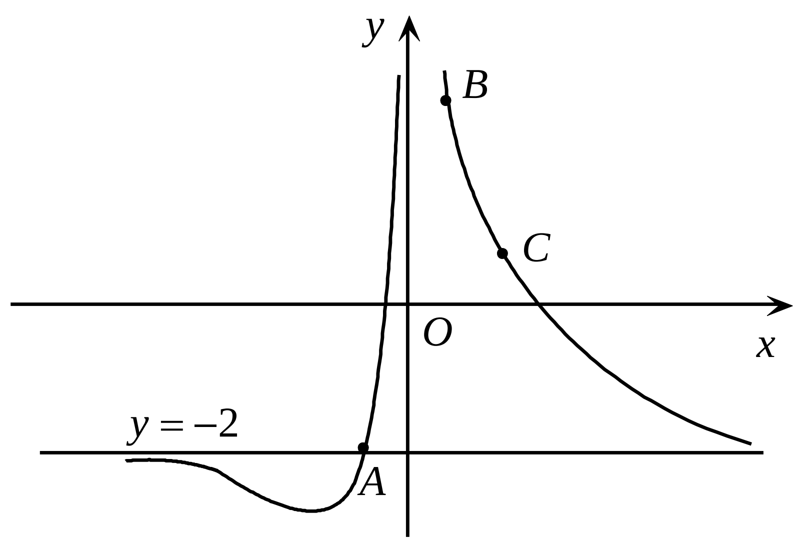
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2]=+\infty$ 得铅直渐近线 $x=0.$

补充点 $(1-\sqrt{3},0),\quad (1+\sqrt{3},0);$ $A(-1,-2),\ B(1,6),\ C(2,1).$

列表确定函数单调区间, 凹凸区间及极值点和拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	□	拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$	□	极值点 -3	□	间断点	□

作图: 图形如图



例3 作出函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解: $D:(-\infty,+\infty)$, 无奇偶性及周期性.

$$f'(x)=(3x+1)(x-1),\qquad f''(x)=2(3x-1).$$

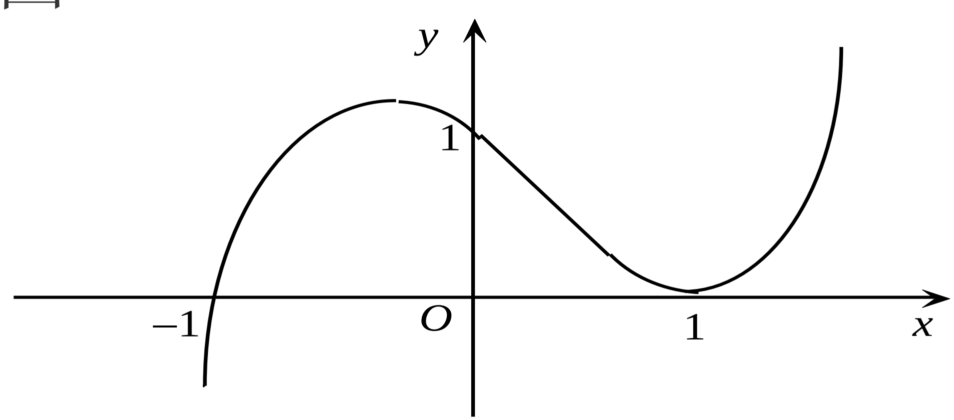
由 $f'(x)=0$, 得 $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$. $f''(x)=0$, 得 $x=\frac{1}{3}$.

补充点 $A(-1,0), B(0,1), C(\frac{3}{2},\frac{5}{8})$.

列表确定函的单调区间, 凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	□	极大值 $\frac{32}{27}$	□	拐点 $(\frac{1}{3},\frac{16}{27})$	□	极小值 0	□ .

作图：图形如图



例4 作出函数$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图形.

解: $D:(-\infty,+\infty), W:0<\varphi(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.4.$ 偶函数, 图形关于轴对称.

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \varphi''(x)=-\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

由 $\varphi'(x)=0$, 得 $x=0$, $\quad\varphi''(x)=0$, 得 $x=-1, x=1$.

又$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0.$ 由得水平渐近线 $y=0$.

列表确定函数的单调区间, 凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	□	拐点 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	□	极大值	□	拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	□

作图：图形如图