第九节　二元函数的泰勒公式

- 二元函数的泰勒公式
- 二元函数极值充分条件的证明

一、二元函数的泰勒公式

定理 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0)的某一邻域内有直到 $n+1$阶连续偏导数，$(x_0 + h, y_0 + k)$是此邻域内任一点，则存在 $\theta: 0 < \theta < 1$，使得

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

这一公式称为二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的**n阶泰勒公式**，最后一项称为**拉格朗日型余项**，其中记号为

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)=hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0),$$

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)=h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0),$$

一般, $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)=\sum_{P=0}^{m}C_m^P h^P k^{m-P}\frac{\partial^m f}{\partial x^P \partial y^{m-P}}\bigg|_{(x_0,y_0)}$

公式最后一项偏导数应在点 $(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ 取值.

证 设 $\Phi(t)=f(x_0+th, y_0+tk), \qquad (0\le t\le 1)$

由复合函数的求导法则可知 $\Phi(t)$在区间$[0, 1]$上有直到 n+1阶的连续导数, 因此, 当 $t\in[0,1]$时, n阶麦克劳林公式成立, 即存在$\theta : 0<\theta<1$, 使得

$$\Phi(t)=\Phi(0)+\Phi'(0)t+\frac{1}{2!}\Phi''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)t^n+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta t),$$

令$t=1$, 得

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2}\Phi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta)$$

其中$\Phi(1)=f(x_0+h,y_0+k),\Phi(0)=f(x_0,y_0)$,

再求复合函数导数, 得

$$\Phi'(t) = hf_x(x_0 + th, y_0 + tk) + kf_y(x_0 + th, y_0 + tk)$$

$$= (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}) f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

$$\Phi''(t) = h^2 f_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk) + 2hkf_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk)$$

$$+ k^2 f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk),$$

....

$$\Phi^{(n+1)}(t) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

将$\Phi(1), \Phi(0), \cdots, \Phi^{(n)}(0)$及$\Phi^{(n+1)}(\theta)$的值代入上面的麦克劳林公式中，就得到要证的泰勒公式，定理证毕.

当$n=0$时，泰勒公式成为

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + hf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

这个公式称为二元函数的**拉格朗日中值公式**.

利用拉格朗日中值公式，容易证明以下定理:

如果函数$f(x,y)$的偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$在区域D内都恒等于零, 则函数$f(x,y)$在区域D内恒等于一个常数.

例1: 求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$在点（0, 0）的三阶泰勒公式

解: 因为

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=\frac{1}{1+x+y},$$

$$f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=f_{xy}(x,y)=-\frac{1}{(1+x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^p \partial y^{3-p}} = \frac{2!}{(1+x+y)^3}, \qquad (p=0,1,2,3),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^p \partial y^{4-P}} = -\frac{3!}{(1+x+y)^4}, \qquad (p=0,1,2,3,4).$$

所以

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(0,0) = hf_x(0,0)+kf_y(0,0) = h+k$$

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(0,0) = h^2 f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2 f_{yy}(0,0)$$

$$= -(h+k)^2,$$

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3 f(0,0)=h^3 f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2 f_{xyy}(0,0)$$

$$+k^3 f_{yyy}(0,0)=2(h+k)^3,$$

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^4 f(\theta h,\theta k)=h^4 f_{xxxx}(\theta h,\theta h)+4h^3kf_{xxxy}(\theta h,\theta k)$$

$$+6h^2k^2 f_{xxyy}(\theta h,\theta k)+4hk^3 f_{xyyy}(\theta h,\theta k)+k^4 f_{yyyy}(\theta h,\theta k)$$

$$=-\frac{3!}{(1+\theta h+\theta k)^4}(h+k)^4 .$$

又$f(0, 0)$=0, 代入三阶泰勒公式中, 并令 $h=x,\ \ k=y,$

便得

$$\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3-\frac{1}{4}\frac{(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4}.$$

二、二元函数极值充分条件的证明

现在可以利用泰勒公式，对第八节定理2加以证明. 由定理的条件，$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(P_0)$内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$

设 $(x,y)=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(P_0)$，则由一阶泰勒公式，

有 $\Delta f = f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$=\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)(\Delta x)^2+2f_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x\cdot\Delta y$$

$$+f_{yy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\ (\Delta y)^2],\quad (0<\theta<1),$$

由于二阶偏导数连续，故有

$$f_{xx}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f_{xx}(x_0,y_0)+\varepsilon_1=A+\varepsilon_1\ ,$$

$$f_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon_2=B+\varepsilon_2\ ,$$

$$f_{yy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f_{yy}(x_0,y_0)+\varepsilon_3=C+\varepsilon_3\ ,$$

其中当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0$ 代入上面 Δf 的式子中去，得 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[A(\Delta x)^2+2B\Delta x\cdot\Delta y+C(\Delta y)^2]$

$$+\frac{1}{2}[\varepsilon_1(\Delta x)^2+2\varepsilon_2\Delta x\Delta y+\varepsilon_3(\Delta x)^2].$$

当 $\rho \to 0$时，上式右端第二项是比第一项高阶的无穷小，因此，当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 充分小时，$f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 的符号由右端第一项的符号所决定. 设 $Q = A(\Delta x)^2 + 2B\,\Delta x \cdot \Delta y + C(\Delta y)^2$

（1）当 $AC - B^2 > 0$ 时，这时A, C同号且均不为零，当 $\Delta x, \Delta y$ 不同时为零时，$Q = \dfrac{1}{A}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 + (AC - B^2)(\Delta y)^2]$

由于方括号内总是正数，所以Q与A同号， 因而 $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 与A同号.

当$A>0$时，$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，$f(x_0,y_0)$为极小值.

当$A<0$时，$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，$f(x_0,y_0)$为极大值.

（2）当$AC-B^2<0$时，考虑以下三种情况：

如果$A\neq 0$，取$\Delta x,\Delta y$，使$A\Delta x+B\Delta y=0$且$\Delta y\neq 0$，则

$Q=\frac{1}{A}[(AC-B^2)(\Delta y)^2]$与$A$异号，取$\Delta y=0$且$\Delta x\neq 0$时，$Q=A(\Delta x)^2$

与A同号，因此在点(x_0,y_0)的邻域内既有点使

$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，也有点使$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，因此，

$f(x_0,y_0)$不是极值.

如果 $A=0$ ，但 $C\neq 0$ 时，可类似地证明 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

如果 $A=C=0$，则必有 $B\neq 0$，此时 $Q=2B\Delta x\cdot\Delta y$，取 $\Delta x=\Delta y\neq 0$时，$Q=2B(\Delta x)^2$与B同号，取$\Delta x=-\Delta y\neq 0$时，$Q=-2B(\Delta x)^2$与B异号，同样得知 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

（3） 当 $AC-B^2=0$时，容易举例说明不能肯定 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值. 例如以下两个函数

$$f(x,y)=x^2+y^4,\qquad g(x,y)=x^2+y^3$$

容易验证,这两个函数都以（0, 0）为驻点,且在点（0, 0）处都有 $AC-B^2=0$，但 $f(x,y)$在（0, 0）处有极小值0，而 $g(x,y)$ 在（0, 0）处不取极值.