第四章　导数的应用

第一节 中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

罗尔(Rolle)定理 如果函数 $f(x)$满足:

1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

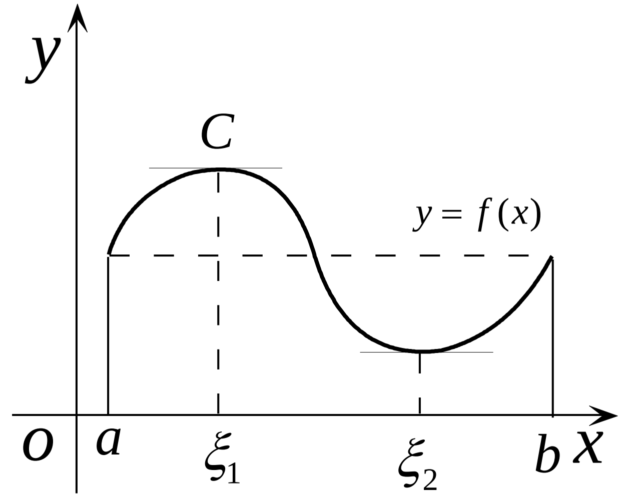
2) 在开区间 (a,b) 内可导,

3) 在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b)内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得函数$f(x)$在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$.

证明： $\because f(x)$ 在 $[a,b]$连续, $\therefore f(x)$在闭区间上必有最大值 M和最小值 m.

$\therefore$



(1) 如果 $M=m$. 则 $f(x)=M$.

由此得 $f'(x)=0$. $\forall\xi\in(a,b)$,都有

$$f'(\xi)=0.$$

(2) 如果 $M\neq m$. $\because f(a)=f(b)$,

最值不可能同时在端点取得.

不妨设 $M\neq f(a)$,则在区间 (a,b)内至少存在一点 ξ

使 $f(\xi)=M$.

$$\because f(\xi+\Delta x)\le f(\xi),\ \therefore f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\le 0,$$

如果 $\Delta x>0$,则有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\le 0$;

如果 $\Delta x<0$,则有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\ge 0$;

$$f'_{+}(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\le 0.$$

$$f'_{-}(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\ge 0;$$

$\because f'(\xi)$ 存在 $\quad\Rightarrow f'(\xi)=0.$

$\therefore f'_{-}(\xi)=f'_{+}(\xi)$

例如： $f(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. 在 $[-1,2]$上连续, 在$(-1,2)$可导, 且 $f(-1)=f(2)=0$, $\because f'(x)=2x-1$,取 $\xi=\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2}\in(-1,2))$ $f'(\xi)=0.$

注意:如果罗尔定理的三个条件中有一个不满足, 其结论一般不成立. 例如：

(1)$y=|x|, x\in[-1,1]$; 在 $x=0$ 处不可导；

(2)$y=\begin{cases}1-x, & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$; 在区间 $[0,1]$上不连续；

(3) $y = x,\ x \in [0,1]$, 在区间的端点函数值不相等，

均不满足罗尔定理条件，故它们在区间内均不存在ξ使$f'(\xi) = 0$.

例1 证明方程$x^5 - 5x + 1 = 0$有且仅有一个小于1的正实根.

证： 设 $f(x) = x^5 - 5x + 1$, 则$f(x)$在上连续，且 $f(0) = 1,\ f(1) = -3$.
由介值定理知存在 $x_0 \in (0,1)$, 使$f(x_0) = 0$. 即方程有小于1的正实根存在. 现在假设有 $x_1 \in (0,1), x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1) = 0$.

$\because f(x)$在x_0, x_1之间满足罗尔定理的条件, 所以至少存在一个ξ(在x_0, x_1之间), 使得 $f'(\xi) = 0$. 但

$$f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0 \quad (x \in (0,1))$$

矛盾. 所以方程仅有唯一实根.

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日(Lagrange)中值定理 如果函数$f(x)$满足:

1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

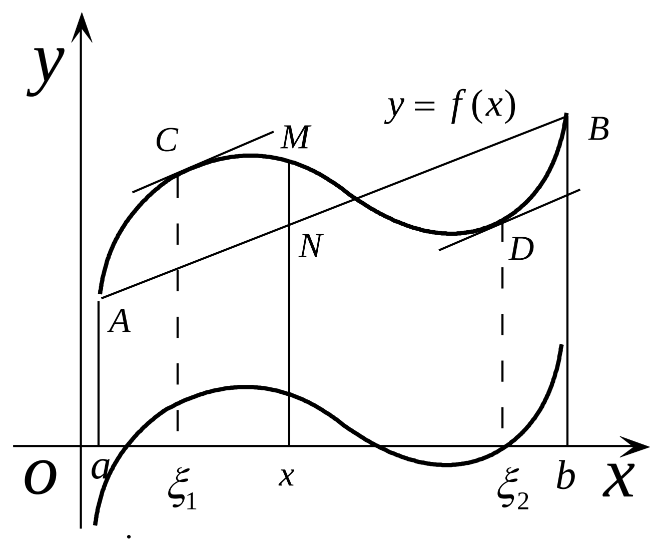
2) 在开区间(a,b)内可导,

那么在(a,b)内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

证明: 分析: 弦 AB方程为:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



因为曲线方程$y=f(x)$与弦AB方程之差, 所表示的曲线在两端点处的函数值必相等. 故作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$$

易知$F(x)$满足罗尔定理三个条件. 故在(a,b)内至少存在一点ξ, 使得$F'(\xi)=0$.

即 $$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

或 $$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

证毕.

注意: 拉格朗日公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数值之间的关系.

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$, 则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

亦可记为

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

因此，拉格朗日中值公式又称有限增量公式. 拉格朗日中值定理又称为**有限增量定理**.

推论1　如果函数$f(x)$在区间 I 内的导数恒为零，那么 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.

推论2　如果函数 $f(x)$ 、$g(x)$ 在区间 I 内满足$f'(x)=g'(x)$，那么在区间 I 上 $f(x)=g(x)+C$

例2 证明: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}\ (-1 \le x \le 1).$

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in [-1,1]$

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0. \quad \therefore f(x) \equiv C, \quad x \in [-1,1]$$

又$\because f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ 即 $C = \dfrac{\pi}{2}.$

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

例3 证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日定理条件

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$$

$\because f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x},$ 由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi},$

又 $\because 0<\xi<x$，$\therefore 1<1+\xi<1+x.$ 从而 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1.$

$$\therefore \frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,\quad \text{即}\ \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

三、柯西(Cauchy)中值定理

柯西(Cauchy)中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

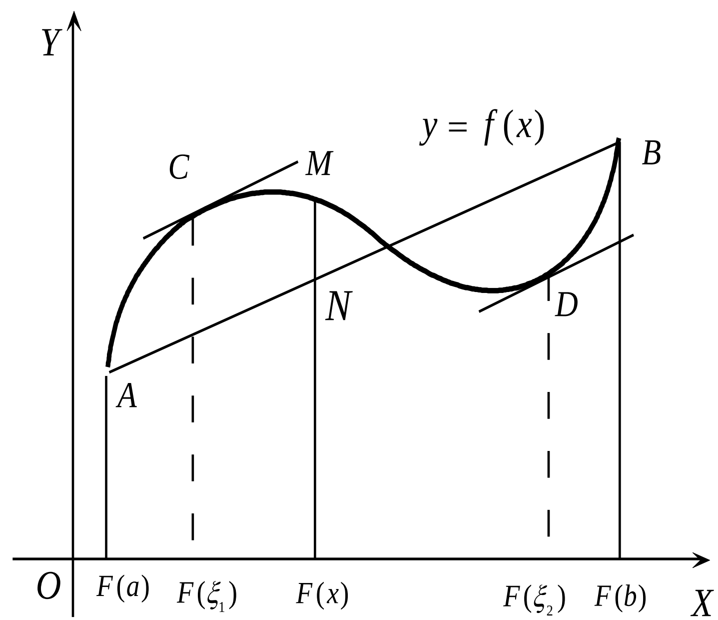
1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

2) 在开区间 (a,b) 内可导；

3) $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零；

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$



几何意义如图． 说明曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点 $C(F(\xi),f(\xi))$ 在该点处的切线平行于弦 AB.

证： 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$

则 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理条件

在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得$\varphi'(\xi)=0.$

即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(\xi)=0,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

证毕

注： 特别地如果$F(x)=x$, 则 $F(b)-F(a)=b-a,\ F'(x)=1,$

由 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 易得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$

可见此时柯西(Cauchy)中值定理就是拉格朗(Lagrange)中值定理, 故又称柯西中值定理为`广义中值定理.

例4 设函数 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，在$(0,1)$ 内可导. 证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证 分析： 要证明的结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$

因此可设 $g(x)=x^2$,则 $f(x),g(x)$在区间 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理得条件，从而在 $(0,1)$内至少存在一点 ξ 有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$