§5 幂级数的应用

一、函数值的近似计算

例1 计算 e 的近似值.

解 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

当 $x = 1$时,有 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

则误差 $|R_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!} + \cdots$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\,n}$$

故若要求精确到10^{-k}，则只须 $\frac{1}{n!\,n}<10^{-k}$即$n!\,n>10^{k}$即可

读者可在计算机上求此值

e = 2.718 281 828 459 0…

例2 制作四位正余弦函数表.

解 $\because \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

所以只需制作 $0° \sim 45°$ 的正余弦表就行了

$$\because \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

注意这两个级数都是满足莱布尼兹条件的交错级数,去掉前若干项之后,剩余项仍为满足莱布尼兹条件的交错级数.由莱布尼兹判定定理可知,若取这两个级数的前若干项作为近似时,误差不超过所弃项中的第一项,因为

$$\frac{(\frac{\pi}{4})^8}{8!} < \frac{(\frac{\pi}{4})^7}{7!} < 0.000037$$

所以要作的$0° \sim 45°$四位正余弦表只需要取到至 x^6 多项,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

作表时须以弧度为单位.

从以上例子可以看出,用泰勒级数的部分和作近似计算时其误差通常有如下两种估计法:

1. 如展开式是收敛的交错级数,取前 n 项作近似计算时,其误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值,即 $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$

2. 对一般的收敛级数,取前 n 项作近似计算时,其误差是个无穷级数.把它的每一项适当放大,成为一个收敛的等比级数,由等比级数求和公式,便可得到误差的估计.

二、在积分计算中的应用

一些初等函数,如 e^{x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\cos x^2$, $\sqrt{1+x^3}$, $\dfrac{1}{\ln x}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ 等,它们的原函数不是初等函数,但在它们的连续区间内原函数是存在的,变上限定积分就是它的一个原函数,如 $\int_0^x e^{t^2}dt$ 是 e^{x^2} 的一个原函数.因此,将这样的被积函数展开为幂级数,然后在收敛区间内,逐项积分,所得到的幂级数就是被积函数的原函数的又一种表示方式,如

$$\int_0^x e^{x^2}dx=\int_0^x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\right)dx$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}+\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\cdots \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

这个幂级数就是函数 e^{x^2} 的一个原函数的级数形式

例3计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$的近似值,精确到$10^{-4}$

解 $\because \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \qquad (x \neq 0)$

$$\therefore \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

当 $x = 1$ 时,有

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

这是个交错级数,若取前三项作为近似值,其误差为

$$|R_3| < \frac{1}{7!\cdot 7} = \frac{1}{35280} < 10^4$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} = 1 - \frac{97}{1800} \approx 0.9461$$

三、求极限

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解 把 $\cos x$ 和 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的幂级数展开式代入上式,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots)-(1-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^4}{2\cdot 2^2}-\cdots)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+\cdots}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

四、证明欧拉公式

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}$$

$$=1+iy-\frac{1}{2!}y^2-\frac{1}{3!}iy^3+\frac{1}{4!}y^4+\frac{1}{5!}iy^5+\cdots$$

$$=(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\cdots)+i(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\cos y+i\sin y.$$

即有 $$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

同理有 $$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

将上两式式相加减,便得

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases}$$

这两个式子也叫做欧拉公式,它揭示了复变量指数函数与三角函数之间的关系