§ 4函数展开成幂函数

一、泰勒级数

若函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内具有直到$(n+1)$阶的导数，则在该邻域内$f(x)$可表示为:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ξ介于x_0与x之间

上述公式就是函数$f(x)$在x_0处展开的**泰勒公式**

$R_n(x)$为**拉格朗日型余项**.

称形如 $f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

的幂级数为函数 $f(x)$ 在 x_0处(构造出)的**泰勒级数**

特别地,当 $x_0=0$ 时,称幂级数

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

为 $f(x)$(构造出)的**麦克劳林级数**.

定理1 设函数 $f(x)$ 在点x_0的某邻域$U(x_0)$内具有任意阶的导数,则它的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在$U(x_0)$内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0 \qquad x\in U(x_0)$$

证明 用 $S_n(x)$ 表示泰勒级数的前 $(n+1)$ 项和，由泰勒公式知

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) \qquad\qquad S_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

(必要性) 设泰勒级数在 $U(x_0)$ 上收敛于 $f(x)$

则对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - S_n(x)\right] = 0$$

(充分性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad x \in U(x_0)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - R_n(x)\right] = f(x)$$

即在 $U(x_0)$ 上，泰勒级数收敛于 $f(x)$

定理2 （函数幂级数展开的唯一性）

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

则其系数

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\qquad(n=0,1,2,3,\cdots,)$$

这里规定 $0!=1$ $\quad f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$

证明 根据幂级数在收敛区间内可逐项微分,于是

$$f^{(n)}(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]^{(n)}$$

$$=n!a_n+\frac{(n+1)!}{1!}a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\cdots\quad(n=1,2,3,\cdots,)$$

$\therefore f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$ 即 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=1,2,3,\cdots,)$

显然 $a_0=f(x_0)$

二、函数展开成幂级数

1.直接展开法

第一步　求$f(x)$的各阶导数$f'(x),\ f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$, 如果在 $x=0$处某阶导数不存在,就停止进行,它就不能展开为的幂级数;

第二步　计算$f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0)\cdots$,

第三步　写出泰勒级数

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

确定其收敛半径及收敛域;

第四步　考察泰勒公式中的余项$R_n(x)$在收敛区间内时的极限

即$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$是否为零, 若为零则可以展开.

例1 将函数$f(x)=e^x$展开成x的幂级数.

解 $\because f^{(n)}(x)=e^x\ (n=0,1,2,3,\cdots,)$ 有 $f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,2,3,\cdots,)$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad x\in(-1,1)$$

它的收敛半径为 $R=+\infty$

泰勒公式的余项 $R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$ ξ介于0与x之间

$$\because |R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

对任一确定的$x\in(-\infty,+\infty)$, $e^{|x|}$是确定的数

$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$是处处收敛的幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$的一般项

$$\therefore e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\ (n\to\infty) \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$$

即 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ 于是

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例2 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\because f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{nx}{2}) \qquad (n=1,2,3,\cdots,)$

当 $n=2k$ 时，$f^{(2k)}(0)=0$

当 $n=2k+1$ 时，$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

它的收敛半径为 $R=+\infty$

$$\because R_n(x)=\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$ ξ介于0与x之间

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 于是

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

几个常用的麦克劳林展开式：

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \qquad x\in(-1,1];$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\cdots \qquad x\in(-1,1);$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}=1-x+x^{2}-\cdots+(-1)^{n}x^{n}+\cdots \qquad x\in(-1,1);$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n+\cdots$$

$$x\in[-1,1]$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad x\in(-1,1)$$

上式称之为**牛顿二项式展开式**.当α为正整数时，上式就是代数中的二项公式.（证明见教材P308页）

2.间接展开法

例3将函数 $f(x)=\cos x$展开为 x 的幂级数.

解 $$\cos x=(\sin x)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

例4将函数 $f(x)=\arctan x$展开为 x 的幂级数.

解 $$\arctan x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x[1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots]dx$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad x\in(-1,1)$$

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 收敛;

当$x=-1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$收敛;

$$\therefore \arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad x\in[-1,1]$$

例5将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开成 $x-2$的幂级数，并求$f^{(n)}(2)$

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3\left(1+\dfrac{x-2}{3}\right)}-\dfrac{1}{4\left(1+\dfrac{x-2}{4}\right)}$

$$\frac{1}{3\left(1+\frac{x-2}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-2)^n \qquad x\in(-1,5)$$

$$\frac{1}{4\left(1+\frac{x-2}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-2)^n \qquad x\in(-2,6)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n \qquad x\in(-1,5)$$

$$\because\ \frac{f^{(n)}(2)}{n!}=(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right) \qquad \therefore\ f^{(n)}(2)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$