§3函数项级数与幂级数

一、函数项级数

如果给定一个定义在区间I上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_n(x), \cdots,$$

则由这个数列构成的表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

称为定义在区间I上的**函数项级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

设函数$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$都在区间I上有定义, 对函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 当点$x_0 \in I$时,若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$$

收敛,则称 x_0 为级数的**收敛点**,否则称为级数的**发散点**.

所有收敛点构成的集合,称为级数的**收敛域**;

所有发散点构成的集合,称为级数的**发散域**.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在收敛域上,对于每一个收敛点 x 都有一个确定的和 S,因而,在收敛域上,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和是 x 的函数,记为 $S(x)$,称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**.

当 $x \in$ 收敛域时,有

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

设 $S_n(x)$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和,则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

称$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**余项**（或**余和**）

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

二、 幂级数及其收敛性

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的函数项级数叫做 $(x-x_0)$ 的**幂级数**,其中常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为**幂级数的系数**.

当 $x_0=0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

这时的幂级数叫做x 的**幂级数**.

定理 1（阿贝尔定理）

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛,则对满足不等式$|x| < |x_0|$的任何 x ,幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛;

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点 $x = x_0$ 处发散,则对满足不等式$|x| > |x_0|$的任何 x,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都发散.

证 （1）设x_0是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛点,

即级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛,

根据级数收敛的必要条件可知,有 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$

因为收敛数列必有界,故存在正数 M ,使得

$$|a_n x_0^n| \leq M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore |a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

因为当 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$，即 $|x| < |x_0|$ 时，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛，

所以由比较审敛法可知,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛,

从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

（2） 用反证法. 若 x_0 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的发散点，而存在

一点 x_1,满足 $|x_1| > |x_0|$ 使级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛,则由(1)

的结论可知,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 应在处 x_0 收敛,

这与题设矛盾,定理得证.

由此定理知道:幂级数的收敛域是以原点为中心的区间,若以$2R$ 表示区间的长度,则称 R 为幂级数的**收敛半径**.

称开区间 $(-R,+R)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛区间**.

对于求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径,我们有如下定理:

定理2 对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad 或 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径

$$R=\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho=0, \\ 0, & \rho=+\infty。 \end{cases}$$

证 这里只证 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ 情形,因为正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots$$

的后项与前项比的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=\rho\cdot|x|$$

根据比值审敛法知

（1）当$0<\rho<+\infty$时，如果$|x|<\frac{1}{\rho}$,即$\rho|x|<1$,

则级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛,从而级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛;

如果$|x|>\frac{1}{\rho}$,即有$\rho|x|>1$,则级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$发散,

并且从某一个n 开始 $|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|$

因此一般项$\left| a_n x^n \right|$不能趋于零，从而$a_n x^n$也不能趋于零，

从而级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散,于是收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$

（2） 当$\rho=0$时，恒有$\rho|x|=0$，故级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left| a_n x^n \right|$处处收敛，

即级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$处处绝对收敛，$R=+\infty$

（3） 当$\rho=+\infty$时，除$x=0$外，$\rho|x|=+\infty$，

级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left| a_n x^n \right|$除一点$x=0$外处处发散

所以级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x\neq 0$时发散,$R=0$

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{或} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

例1 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$

解（1）收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n \cdot n}}{\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

当 $x=-2$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 是收敛的交错级数;

当 $x=2$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数,发散

故所求幂级数的收敛域为 $[-2,2)$

(2) 这是缺奇数次幂项的幂级数,定理2不能直接应用.

作变换,令 $y = x^2$ 级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} y^{n-1}$

$$\because R_y = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{2^n}}{\frac{2n+1}{2^{n+1}}} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = 2$$

当$y=2$时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-\frac{1}{2})$

$\because \lim_{n\to\infty}(n-\frac{1}{2}) \neq 0$ 所以这个级数发散

故 $y(\geq 0)$ 的幂级数收敛域为 $0 \leq y < 2$

原幂级数收敛域是 $0 \leq x^2 < 2$

即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 收敛半径 $R = \sqrt{2}$

例2 求$(x-\frac{1}{2})$的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$的收敛域.

解 作变换,令$\tau=x-\frac{1}{2}$,级数化为τ 的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\tau^n$

$$\because R_{\tau}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}=\frac{1}{2}$$

当 $\tau=-\frac{1}{2}$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散;

当 $\tau=\frac{1}{2}$时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛;

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\tau^n$ 的收敛域为$-\frac{1}{2}<\tau\leq\frac{1}{2}$

原级数的收敛域为$-\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$ 即$0<x\leq 1$

收敛半径 $R=\frac{1}{2}$

三、幂级数的运算

设有两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \qquad x \in (-R_1, R_1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sigma(x) \qquad x \in (-R_2, R_2)$$

记 $R = \min\{R_1, R_2\}$

（1） 加法与减法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \pm \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = S(x) \pm \sigma(x) \qquad x \in (-R, R)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛.

（2） 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n = S(x)\cdot\sigma(x) \qquad x \in (-R, R)$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛.

（3） 除法

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots}$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

相除后所得的幂级数的收敛半径有时比上述的 R 小.

分析(微分和积分运算)**运算性质**:

(4)在收敛域上,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数$S(x)$是连续函数.

(5)在收敛域内,幂级数可**逐项微分**,且收敛半径不变,即有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(6)在收敛域内,幂级数可**逐项积分**,且收敛半径不变,即有

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_0^x x^n\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

幂级数逐项微分或逐项积分后,虽然收敛半径不变,收敛区间不变,但收敛域有可能改变

例3 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$的和函数.

解 $\because R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

当 $x=-1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散;

当 $x=1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散;

所以收敛域为 $(-1,1)$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n \qquad x\in(-1,1)$

$$S(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}=x\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right]'=x\cdot\left(-\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$=-\frac{x}{1+x^2}$$

即原幂级数的和函数为 $S(x)=-\dfrac{x}{1+x^2} \quad (-1<x<1)$

例4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解 $\because R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$

当 $x=-1$ 时,级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 是收敛的交错级数

当 $x=1$ 时,级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 是发散的

因此收敛域为 $[-1,1)$

设 $x\in[-1,1)$时, $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ $\therefore xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

逐项求导:

$$\left[xS(x)\right]' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1)$$

两边积分,得

$$xS(x) = \int_0^x \left[xS(x)\right]' dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \qquad (-1 \le x \le 1)$$

当 $x \neq 0$ 时, $\quad S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$

当 $x = 0$ 时, $\quad S(0) = a_0 = 1$

故所求幂级数的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1,0) \cup (0,1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解 $\because R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$

当$x=\pm 1$时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)$ 都发散,

所以收敛域为$(-1,1)$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$

$$\therefore S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{1-x^3} \qquad x\in(-1,1)$$

令 $x=\frac{1}{2}$,得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2}\cdot S(\frac{1}{2})=8$