第四节 向量及其线性运算

一、平面的点法式方程

二、平面的一般方程

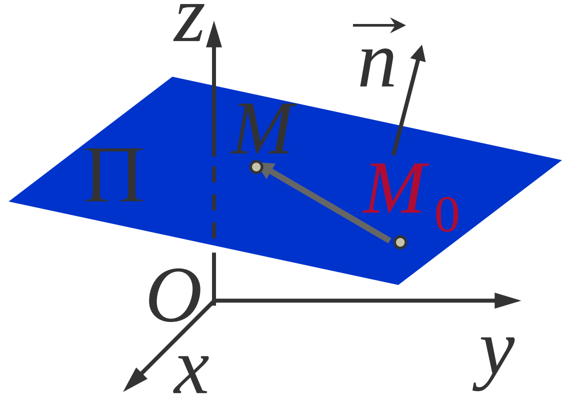
三、平面的截距式方程

四、两平面的夹角

五、点到平面的距离

一、平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$, 求该平面 Π 的方程.



任取点 $M(x, y, z)\in\Pi$, 则有

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$$

故

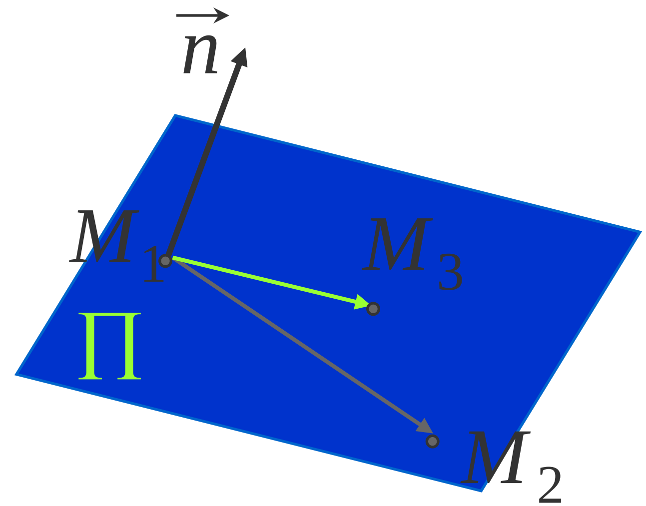
$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$$

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad ①$$

称①式为平面 Π 的**点法式方程**, 称 $\vec{n}$ 为平面 Π 的**法向量**.

例1. **求过三点** $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.



解: 取该平面Π 的法向量为

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (14, 9, -1)$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

即 $$14x+9y-z-15=0$$

说明：此平面的**三点式方程**也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况： 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)\ (k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

二、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad ②$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0，则

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

以上两式相减，得平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

显然方程②与此点法式方程等价,因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$的平面，此方程称为**平面的一般方程**.

$$Ax+By+Cz+D=0\quad(A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

特殊情形

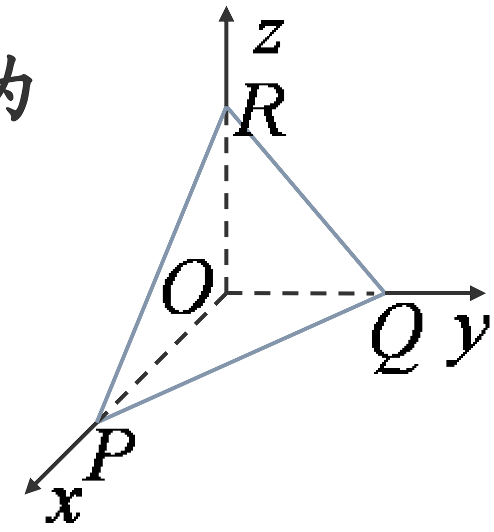
- 当 $D=0$ 时，$Ax+By+Cz=0$ 表示**通过原点**的平面;
- 当 $A=0$ 时，$By+Cz+D=0$ 的法向量

  $\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i}$, 平面平行于 x 轴;
- $Ax+Cz+D=0$ 表示 平行于 y 轴的平面;
- $Ax+By+D=0$ 表示 平行于 z 轴的平面;
- $Cz+D=0$ 表示 平行于 xOy 面 的平面;
- $Ax+D=0$ 表示 平行于 yOz 面 的平面;
- $By+D=0$ 表示 平行于 zOx 面 的平面.

三、平面的截距式方程

特别，当平面与三坐标轴的交点分别为

$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$



将三点的坐标代入平面的一般方程

$Ax+By+Cz+D=0$，得方程组

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0. \end{cases}$$

即有 $A=-\dfrac{D}{a}, B=-\dfrac{D}{b}, C=-\dfrac{D}{c}.$

整理得: $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (a,b,c\neq 0)$$

此式称为平面的**截距式方程**.

例 2. **求通过 x 轴和点(4, – 3, – 1) 的平面方程.**

解: 因平面通过 x 轴，故 $A=D=0$ 设所求平面方程为

$$By+Cz=0$$

代入已知点 $(4,-3,-1)$ 得 $C=-3B$

化简，得所求平面方程.

例 3 将 $\begin{cases} y-3z=0, \\ 3x+2y-z-6=0 \end{cases}$ 化为截距式方程.

解: 方程两边除以6，并整理得截距式方程

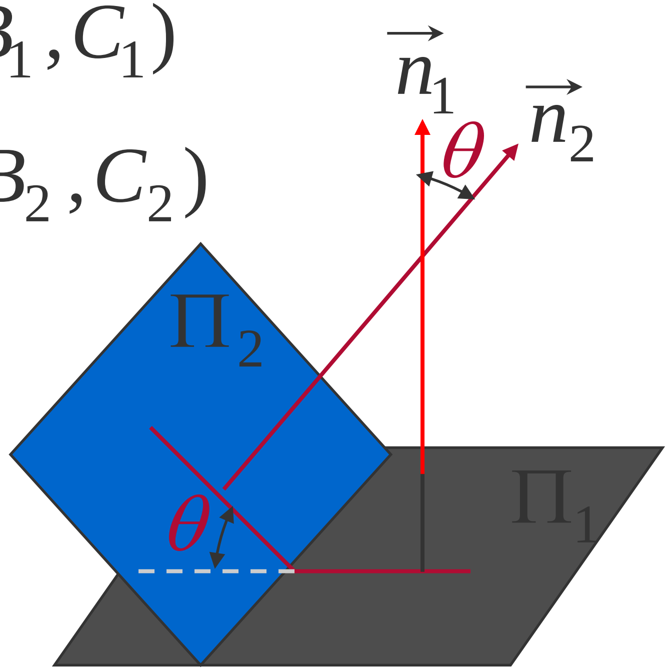
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-6}=1.$$

四、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$



则两平面夹角θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\,\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$$

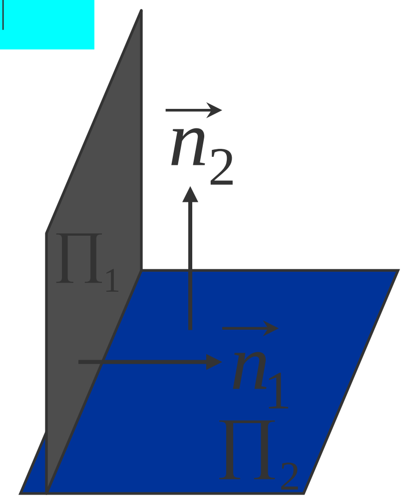
$$\Pi_1: \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \qquad \cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

$$\Pi_2: \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

特别有下列结论:

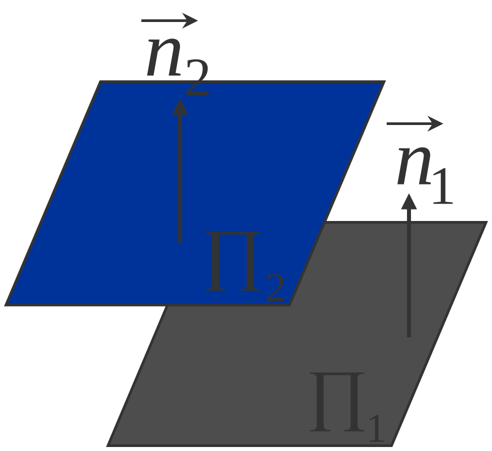
(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



例4. 求两平面 $x-4y-8z+12=0$ 和 $x+20y+7z-12=0$ 的夹角.

解: 由两平面夹角公式

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

得

$$\cos\theta=\frac{|1\times1+(-4)\times20+(-8)\times7|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{1^2+20^2+7^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

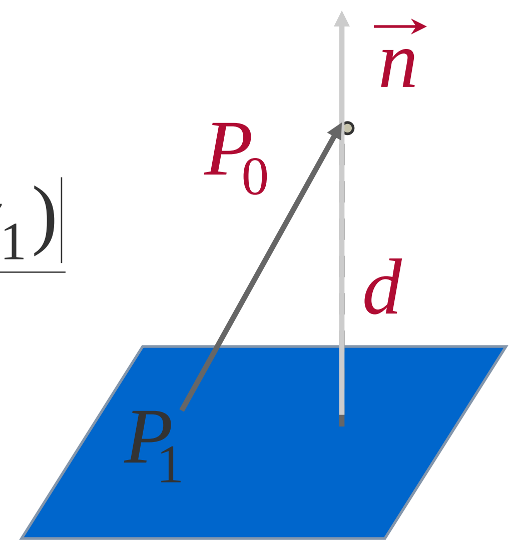
所以两平面的夹角 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

五、点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，设平面法向量为 $\vec{n}=(A, B, C)$，在平面上取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则 P_0 到平面的距离为

$$d=\left|\operatorname{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



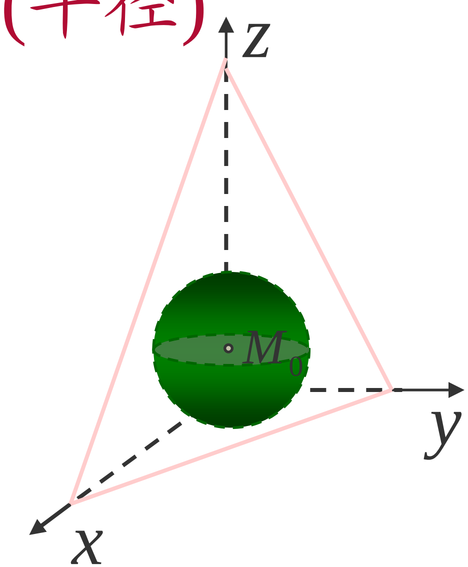
因为 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$

所以 $$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例5. 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则它位于第一卦限, 且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=x_0=y_0=z_0=R(\text{半径})$$



$$\because x_0+y_0+z_0\le 1,\ \therefore 1-3x_0=\sqrt{3}\,x_0$$

故 $$R=y_0=z_0=x_0=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

因此所求球面方程为

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

例6 求过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 垂直的平面方程.

解法1 (点法式法)

由题意，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$垂直于$\overrightarrow{M_1M_2}$ 又垂直于已知平面 $x+y+z=0$ 的法向量$\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，所以可取 $n=n_1\times\overrightarrow{M_1M_2}$ ，即

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2i+j+k=(-2,1,1)$$

故所求平面的点法式方程为 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$ ，即 $-2x+y+z=0.$

解法2 （解方程法）

设所求平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ ， 由于该方程过 M_1 和 M_2两点，所以这两点的坐标满足方程. 又知所求平面与已知平面 $x+y+z=0$ 垂直，所以两平面的法向量的数量积为零. 由此得三个方程

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ B-C+D=0, \\ A+B+C=0. \end{cases}$$

由此得，$D=0, B=C, A=-2C$. 代入所设方程, 并除以 $C(C\neq 0)$

便得所求平面方程 $-2x+y+z=0.$

解法3 (解方程法)

设所求平面的法向量为 $n=(A,B,C)$ ，由于向量

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$ 在所求平面上，则 $\overrightarrow{M_1M_2}\perp n$ ，所以

$(-1)\times A+0\times B+(-2)\times C=0$ ，即 $A+2C=0$

又因所求平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直, 所以又有

$1\times A+1\times B+1\times C=0$ ，即 $A+B+C=0$

上两式联立求解并取特殊值 $C=1$ ，即

$$A=-2C=-2, B=-A-C=1$$

所以 $n=(A,B,C)=(-2,1,1)$

则所求方程 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$，即 $-2x+y+z=0.$

例7 两平面 $12x+9y+20z-19=0$ 与 $16x-12y+15z-9=0$, 在 z 轴上求出与这两平面等距离的点.

解 因所求点在 z 轴上, 设所求点为 $(0,0,z)$,

由距离公式得

$$\frac{|20z-19|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}=\frac{|15z-9|}{\sqrt{16^2+(-12)^2+15^2}},$$

即

$$|20z-19|=|15z-9|.$$

因此 $20z-19=15z-9$, 与 $20z-19=-(15z-9)$.

由此得 $z=2$和 $z=\frac{4}{5}$, 故所求点为 $(0,0,2)$ 和 $(0,0,\frac{4}{5})$.

内容小结

1.平面基本方程:

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \qquad (abc \neq 0)$

三点式 $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$