

# 相对论力学

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

November 29, 2013

# teaching objectives

- ① 能量-动量四维矢量；

- ① 能量-动量四维矢量；
- ② 质能关系；

- ① 能量-动量四维矢量；
- ② 质能关系；
- ③ 相对论力学方程；

- ① 能量-动量四维矢量；
- ② 质能关系；
- ③ 相对论力学方程；
- ④ 洛伦兹力；

- ① 能量-动量四维矢量；
- ② 质能关系；
- ③ 相对论力学方程；
- ④ 洛伦兹力；

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$



经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

不协变！

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

不协变！

引入四维速度： $U_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau} = \gamma \frac{dx_{\mu}}{dt}$

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

不协变!

引入四维速度： $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}$  可以定义四维动量：

$$p_\mu = m_0 U_\mu$$

四维动量的空间分量和时间分量为：

## 1. 能量-动量四维矢量

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

## 1. 能量-动量四维矢量

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i m_0 c^2}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 1. 能量-动量四维矢量

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{ic m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

当  $v \ll c$  时,  $\vec{p}$  趋于经典动量。

此时

## 1. 能量-动量四维矢量

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i m_0 c^2}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

当  $v \ll c$  时,  $\vec{p}$  趋于经典动量。

此时

$$p_4 = \frac{i}{c} \left( m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \right)$$

## 1. 能量-动量四维矢量

展开式中第二项是低速运动物体动能，因此  $p_4$  与物体能量有关！

设相对论中物体的能量为：



## 1. 能量-动量四维矢量

展开式中第二项是低速运动物体动能，因此  $p_4$  与物体能量有关！

设相对论中物体的能量为：

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 1. 能量-动量四维矢量

展开式中第二项是低速运动物体动能，因此  $p_4$  与物体能量有关！

设相对论中物体的能量为：

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则  $p_4 = \frac{i}{c} W$ .

相对论中物体的动能是

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

## 1. 能量-动量四维矢量

$$\text{总能量为: } W = T + m_0c^2$$

## 1. 能量-动量四维矢量

总能量为： $W = T + m_0c^2$

一部分是物体动能；另一部分为静止能量。

相对论协变性和能量守恒要求 $m_0c^2$ 的存在。在一定条件下，物体的静止能量可以转化为其他形式的能量。

## 1. 能量-动量四维矢量

总能量为： $W = T + m_0c^2$

一部分是物体动能；另一部分为静止能量。

相对论协变性和能量守恒要求 $m_0c^2$ 的存在。在一定条件下，物体的静止能量可以转化为其他形式的能量。

能量-动量四维矢量： $p_\mu = (\vec{p}, iW/c)$

## 1. 能量-动量四维矢量

总能量为： $W = T + m_0c^2$

一部分是物体动能；另一部分为静止能量。

相对论协变性和能量守恒要求 $m_0c^2$ 的存在。在一定条件下，物体的静止能量可以转化为其他形式的能量。

能量-动量四维矢量： $p_\mu = (\vec{p}, iW/c)$

有 $p_\mu$ 可构成不变量：

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \text{不变量}$$

## 1. 能量-动量四维矢量

因此,

$$W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4,$$
$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

相对论中动量和能量的关系它是高能物理中的一个重要公式。

## 2. 质能关系

质能关系式对一个粒子适用，对一组粒子组成的复合物体也适用。当一组粒子构成复合物体时，由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能，因而当物体整体静止时，它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和，即  $W_0 \neq \sum_i m_{i0} c^2$ ，其中  $m_{i0}$  为第  $i$  个粒子的质量。



## 2. 质能关系

质能关系式对一个粒子适用，对一组粒子组成的复合物体也适用。当一组粒子构成复合物体时，由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能，因而当物体整体静止时，它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和，即  $W_0 \neq \sum_i m_{i0} c^2$ ，其中  $m_{i0}$  为第  $i$  个粒子的质量。两者之差称为物体的结合能：

## 2. 质能关系

质能关系式对一个粒子适用，对一组粒子组成的复合物体也适用。当一组粒子构成复合物体时，由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能，因而当物体整体静止时，它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和，即  $W_0 \neq \sum_i m_{i0} c^2$ ，其中  $m_{i0}$  为第  $i$  个粒子的质量。两者之差称为物体的结合能：

$$\Delta W = \sum_i m_{i0} c^2 - W_0$$

## 2. 质能关系

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

## 2. 质能关系

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

## 2. 质能关系

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

## 2. 质能关系

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

$$\Delta W = (\Delta M)c^2$$

引入“运动质量”

## 2. 质能关系

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

$$\Delta W = (\Delta M)c^2$$

引入“运动质量”

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 2. 质能关系

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

$$\Delta W = (\Delta M)c^2$$

引入“运动质量”

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $W = mc^2$



## 2. 质能关系

粒子的质量常用 $\text{MeV}/c^2$ 作单位表出, 动量用 $\text{MeV}/c$ 表出, 能量用 $\text{MeV}$ 表出。

$$1\text{MeV} = 1.602189 \times 10^{-13}\text{J}$$

例 带电 $\pi$ 介子衰变为 $\mu$ 子和中微子:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

已知各粒子质量 $m_\pi = 139.57\text{MeV}/c^2$ ,  $m_\mu = 105.6\text{MeV}/c^2$ ,  $m_\nu = 0$ ,

求 $\pi$ 介子质心系中 $\mu$ 子的能量、动量、速度。

## 2. 质能关系

解 在 $\pi$ 介子质心系中, $\mu$ 介子的动量和能量为

$$\vec{p} = 0, \quad W = m_{\pi}c^2$$

设 $p(\mu)$ 和 $p(\nu)$ 分别是的动量,它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p_{(\mu)}^2 c^2 + m_{\mu}^2 c^4}, \quad W_{(\nu)} = p_{(\nu)} c$$

由动量和能量守恒定律得

## 2. 质能关系

解 在 $\pi$ 介子质心系中, $\mu$ 介子的动量和能量为

$$\vec{p} = 0, \quad W = m_{\pi}c^2$$

设 $p(\mu)$ 和 $p(\nu)$ 分别是的动量,它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p_{(\mu)}^2 c^2 + m_{\mu}^2 c^4}, \quad W_{(\nu)} = p_{(\nu)} c$$

由动量和能量守恒定律得

$$\vec{p}_{(\mu)} + \vec{p}_{(\nu)} = 0,$$

## 2. 质能关系

解 在 $\pi$ 介子质心系中, $\mu$ 介子的动量和能量为

$$\vec{p} = 0, \quad W = m_{\pi}c^2$$

设 $p(\mu)$ 和 $p(\nu)$ 分别是的动量,它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p_{(\mu)}^2 c^2 + m_{\mu}^2 c^4}, \quad W_{(\nu)} = p_{(\nu)} c$$

由动量和能量守恒定律得

$$\vec{p}_{(\mu)} + \vec{p}_{(\nu)} = 0,$$

$$\sqrt{p_{(\mu)}^2 c^2 + m_{\mu}^2 c^4} + p_{(\nu)} c = m_{\pi} c^2$$

### 3. 质能关系

$$|\vec{p}_{(\mu)}| + |\vec{p}_{(\nu)}| = 0,$$

$$p = \frac{m_{\mu}^2 - m_{\pi}^2}{2m_{\pi}} c,$$

$$W = m_{\pi} c^2 - pc = \frac{m_{\mu}^2 + m_{\pi}^2}{2m_{\pi}} c^2$$

得到

$$p = 29.79 \text{ Mev}/c, \quad W(\mu) = 109.78 \text{ MeV}/c^2$$

### 3. 质能关系

$$|\vec{p}(\mu)| + |\vec{p}(\nu)| = 0,$$

$$p = \frac{m^2_{\mu} - m^2_{\pi}}{2m_{\pi}} c,$$

$$W = m_{\pi} c^2 - pc = \frac{m^2_{\mu} + m^2_{\pi}}{2m_{\pi}} c^2$$

得到

$$p = 29.79 \text{ Mev}/c, \quad W(\mu) = 109.78 \text{ MeV}/c^2$$

$\mu$  子的速度为

### 3. 质能关系

$$|\vec{p}_{(\mu)}| + |\vec{p}_{(\nu)}| = 0,$$

$$p = \frac{m_{\mu}^2 - m_{\pi}^2}{2m_{\pi}} c,$$

$$W = m_{\pi} c^2 - pc = \frac{m_{\mu}^2 + m_{\pi}^2}{2m_{\pi}} c^2$$

得到

$$p = 29.79 \text{ Mev}/c, \quad W(\mu) = 109.78 \text{ MeV}/c^2$$

$\mu$ 子的速度为

$$v = 0.2714c$$

### 3. 相对论力学方程

动量随固有时的变化率  $\frac{dp_\mu}{d\tau}$  是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况， $K_\mu$  的空间分量过渡到经典力  $F$ ，其第四分量



### 3. 相对论力学方程

动量随固有时的变化率  $\frac{dp_\mu}{d\tau}$  是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况， $K_\mu$  的空间分量过渡到经典力  $F$ ，其第四分量

$$\begin{aligned} -icK_4 &= \frac{dW}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= \frac{c^2}{W} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

### 3. 相对论力学方程

动量随固有时的变化率  $\frac{dp_\mu}{d\tau}$  是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况， $K_\mu$  的空间分量过渡到经典力  $F$ ，其第四分量

$$\begin{aligned} -icK_4 &= \frac{dW}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= \frac{c^2}{W} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

作用于速度为  $\mathbf{v}$  的物体上的四维力为

### 3. 相对论力学方程

动量随固有时的变化率  $\frac{dp_\mu}{d\tau}$  是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况， $K_\mu$  的空间分量过渡到经典力  $F$ ，其第四分量

$$\begin{aligned} -icK_4 &= \frac{dW}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= \frac{c^2}{W} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

作用于速度为  $\mathbf{v}$  的物体上的四维力为

$$K_\mu = \left( \vec{K}, \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{v} \right)$$

# 相对论协变的力学方程

## 相对论协变的力学方程

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \frac{dW}{d\tau}$$

## 相对论协变的力学方程

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \frac{dW}{d\tau}$$

若用坐标时  $dt$  表示, 为

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \frac{dW}{dt}$$

## 相对论协变的力学方程

$$K = \frac{dp}{d\tau}, \quad K \cdot v = \frac{dW}{d\tau}$$

若用坐标时  $dt$  表示, 为

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K = \frac{dp}{dt}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K \cdot v = \frac{dW}{dt}$$

定义力  $F = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K$

## 相对论协变的力学方程

$$K = \frac{dp}{d\tau}, \quad K \cdot v = \frac{dW}{d\tau}$$

若用坐标时  $dt$  表示, 为

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K = \frac{dp}{dt}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K \cdot v = \frac{dW}{dt}$$

定义力  $F = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K$ , 则相对论力学方程为

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad F \cdot v = \frac{dW}{dt}$$



#### 4.洛伦兹力

洛伦兹力公式:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

用电磁场张量  $F_{\mu\nu}$  和四维速度  $U_\mu$  构成一个  
四维矢量

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu,$$

可证

#### 4.洛伦兹力

洛伦兹力公式:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

用电磁场张量  $F_{\mu\nu}$  和四维速度  $U_\mu$  构成一个四维矢量

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu,$$

可证

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

因此, 洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求。

#### 4.洛伦兹力

洛伦兹力公式: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 和四维速度 $U_\mu$ 构成一个四维矢量

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu,$$

可证

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

因此,洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求。协变的力密度公式:

$$f_\mu = F_{\mu\nu}J_\nu$$