相对论理论的四维形式

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

November 28, 2013

teaching objectives

1. 三维空间正交变换；

teaching objectives

1. 三维空间正交变换；
2. 物理量按空间变换性质的分类；

teaching objectives

1. 三维空间正交变换；
2. 物理量按空间变换性质的分类;
3. 洛伦兹变换的四维形式;

1. 三维空间正交变换；
2. 物理量按空间变换性质的分类;
3. 洛伦兹变换的四维形式;
4. 四维协变量;

teaching objectives

1. 三维空间正交变换；
2. 物理量按空间变换性质的分类;
3. 洛伦兹变换的四维形式;
4. 四维协变量;
5. 物理规律的协变性;

teaching objectives

1. 三维空间正交变换；
2. 物理量按空间变换性质的分类;
3. 洛伦兹变换的四维形式;
4. 四维协变量;
5. 物理规律的协变性;

二维平面上坐标系转动：

二维平面上坐标系转动：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

有

二维平面上坐标系转动：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

有$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 =$ 不变量

二维平面上坐标系转动：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

有 $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 =$ 不变量

同理，三维空间转动

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Or

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

(爱因斯坦求和规则)

此时

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

(爱因斯坦求和规则)

此时

$$\sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{3} {x'_i}^2 \quad \text{or}$$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

(爱因斯坦求和规则)

此时

$$\sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{3} {x'_i}^2 \quad \text{or} \quad x'_i x'_i = x_i x_i$$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

(爱因斯坦求和规则)

此时

$$\sum_{i=1}^{3} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{3} x'_i{}^2 \quad \text{or} \quad x'_i x'_i = x_i x_i$$

因此

$$a_{ij}x_j a_{ik}x_k = x_i x_i$$

比较两边系数，得

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

比较两边系数，得

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

此外，有反变换式 $x_l = a_{il}x'_i$

比较两边系数，得

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

此外，有反变换式 $x_l = a_{il}x_i'$

定义转置矩阵$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$,

比较两边系数，得

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

此外，有反变换式 $x_l = a_{il}x'_i$

定义转置矩阵$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$,则正交条件可表示为

$$\tilde{a}a = I$$

2.物理量按空间变换性质的分类

标量：在空间中没有取向关系,当坐标系转动时保持不变的物理量。如质量、电荷等。$u = u'$.

标量：在空间中没有取向关系,当坐标系转动时保持不变的物理量。如质量、电荷等。$u = u'$.

矢量：在空间中有一定的取向性，用三个分量表示的，当空间坐标作转动变换时，三个分量按同一方式变化的物理量。例如速度、力、电场强度和磁场强度等。

$$\upsilon_i{}' = a_{ij}\upsilon_i$$

有些微分算符，如$\partial/\partial x_i$也是矢量。

二阶张量：用两个矢量指标表示，有9个分量，显示出更复杂的空间取向性质。当空间转动时，其分量T_{ij}按以下方式变换

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$$

如，应力张量，电四极矩。

若 $T_{ij} = T_{ji}$，称为对称张量；$T_{ij} = -T_{ji}$，称为反对称张量。

$$T'_{ii} = a_{ik}a_{il}T_{kl} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{kk}$$

称为(对称)张量的迹。

令时间为第四维，引入虚坐标 $x_4 = ict$.
则间隔不变性表达式变为

令时间为第四维，引入虚坐标 $x_4 = ict$.
则间隔不变性表达式变为

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{不变量}$$

引入希腊字母表示指标$1-4$,间隔不变是可写为

令时间为第四维，引入虚坐标 $x_4 = ict$.
则间隔不变性表达式变为

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$
$$= 不变量$$

引入希腊字母表示指标$1-4$,间隔不变是可写为

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = 不变量$$

洛伦兹变换形式上可看作四维空间的转动

令时间为第四维，引入虚坐标 $x_4 = ict$.
则间隔不变性表达式变为

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{不变量}$$

引入希腊字母表示指标1 − 4,间隔不变是可写为

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

洛伦兹变换形式上可看作四维空间的转动

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$$

此时变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

此时变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

其中

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

标量、矢量、张量的四维推广：

$u = u'$, ${V_\mu}' = a_{\mu\nu} V_\nu$, ${T_{\mu\nu}}' = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$.

标量、矢量、张量的四维推广：

$u = u'$, ${V_\mu}' = a_{\mu\nu} V_\nu$, ${T_{\mu\nu}}' = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$.

此外，间隔和固有时也为洛伦兹标量

$ds^2 = -dx_\mu dx_\mu$, $d\tau = \frac{1}{c} ds$

标量、矢量、张量的四维推广：

$u = u'$, $V_\mu{}' = a_{\mu\nu} V_\nu$, $T_{\mu\nu}{}' = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$.

此外，间隔和固有时也为洛伦兹标量

$ds^2 = -dx_\mu dx_\mu$, $d\tau = \frac{1}{c} ds$

四维速度矢量：

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

注意：通常的三维速度$u_i = \frac{dx_i}{dt}$不是四维矢量的分量。

因为

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\equiv\gamma\mu$$

因为

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma_\mu$$

故此 $U_\mu = \gamma_u(u_1, u_2, u_{3,} ic)$, U_μ的前三个分量和普通速度联系着，当$v \ll c$时即为$\vec{u}$.

设一角频率为ω,波矢$\vec{k}$的平面电磁波在真空中传播。在另一参考系Σ'上观察,该电磁波的频率和传播方向都会发生改变(多普勒效应和光行差效应)。以ω'和$\vec{k}'$表示Σ'上观察到的角频率和波矢量。

电磁波的相位因子：

$$e^{i\varphi}, \varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

电磁波的相位因子：

$$e^{i\varphi}, \varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

在Σ'上观察的相位因子

$$e^{i\varphi'}, \varphi' = \vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t'$$

电磁波的相位因子：

$$e^{i\varphi}, \varphi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$$

在Σ'上观察的相位因子

$$e^{i\varphi'}, \varphi' = \vec{k}'\cdot\vec{x}' - \omega' t'$$

设在时刻$t = t' = 0$, 惯性系Σ和Σ'的原点重合，且$\phi = \phi' = 0$。当在Σ系相位为$\phi = -2\pi n$时，由于相位只是计数问题，不应随参考系而变，故相位是一个不变量，即 $\phi = \phi' =$ 不变量，或者

电磁波的相位因子:

$$e^{i\varphi}, \varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

在Σ'上观察的相位因子

$$e^{i\varphi'}, \varphi' = \vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t'$$

设在时刻$t = t' = 0$, 惯性系Σ和Σ'的原点重合, 且$\phi = \phi' = 0$。当在Σ系相位为$\phi = -2\pi n$时, 由于相位只是计数问题, 不应随参考系而变, 故相位是一个不变量, 即 $\phi = \phi' =$ 不变量, 或者

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t' = \text{不变量}$$

写成四维形式,

$$k'_\mu x'_\mu = k_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

写成四维形式，

$$k'_\mu x'_\mu = k_\mu x_\mu = 不变量$$

得到一个四维波矢量：$k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$

写成四维形式,

$$k'_\mu x'_\mu = k_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

得到一个四维波矢量: $k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$

洛伦兹变换下, 有

$$\begin{aligned} k'_1 &= \gamma(k_1 - \frac{v}{c^2}), \\ k'_2 &= k_2, \\ k'_3 &= k_3, \\ \omega' &= \gamma(\omega - v k_1) \end{aligned}$$

设波矢量$\vec{k}$与x轴方向的夹角为θ,$\vec{k}'$与x轴的夹角为θ',则

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \cos\theta, k'_1 = \frac{\omega'}{c} \cos\theta'$$

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta),\ \theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$$

相对论的多普勒效应和光行差公式！

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\cos\theta, k'_1 = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta),\ \theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$$

相对论的多普勒效应和光行差公式！若Σ'为光源的静止参考系，

则$\omega' = \omega_0$, ω_0为静止光源的辐射角频率．于是可以得到运动光源辐射的角频率：

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}$$

其中v为光源的运动速度，θ为Σ上观察者看到辐射方向与光源运动方向的夹角。

当$v \ll c$时，$\gamma \approx 1$，得经典多普勒效应公式：

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)}$$

其中v为光源的运动速度，θ为Σ上观察者看到辐射方向与光源运动方向的夹角。

当$v \ll c$时，$\gamma \approx 1$，得经典多普勒效应公式：

$$\omega \approx \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}, (v \ll c)$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)}$$

其中v为光源的运动速度，θ为Σ上观察者看到辐射方向与光源运动方向的夹角。

当$v \ll c$时，$\gamma \approx 1$，得经典多普勒效应公式：

$$\omega \approx \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}, (v \ll c)$$

在垂直于光源运动方向观察辐射时，经典公式给出$\omega = \omega_0$，而相对论公式给出：

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, (\theta = 90^\circ)$$

即在垂直于光源运动方向上，观察到的角频率小于静止光源的辐射频率。这现象称为横向多普勒效应。

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, (\theta = 90^\circ)$$

即在垂直于光源运动方向上，观察到的角频率小于静止光源的辐射频率。这现象称为横向多普勒效应。

光行差公式也可以由速度变换公式导出:

$$tg\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u_y}{\gamma(u_x - v)} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$$

某方程形式 $F_\mu = G_\mu$

某方程形式 $F_\mu = G_\mu$

四维矢量在参考系变换下有

$$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu = a_{\mu\nu} G_\nu = G'_\mu$$

某方程形式 $F_\mu = G_\mu$
四维矢量在参考系变换下有

$$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu = a_{\mu\nu} G_\nu = G'_\mu$$

在参考系变换下方程形式不变的性质称为协变性。相对性原理要求一切惯性参考系都是等价的。在不同惯性系中,物理规律应该可以表为相同形式。