矢势及其微分方程

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

2013.10.25

本章重点:

本章重点:

- 矢势的引入和它满足的微分方程

本章重点:

- 矢势的引入和它满足的微分方程
- 引入磁标势的条件及磁标势方程的求解

本章重点：

- 矢势的引入和它满足的微分方程
- 引入磁标势的条件及磁标势方程的求解

本章难点：

本章重点:

- 矢势的引入和它满足的微分方程
- 引入磁标势的条件及磁标势方程的求解

本章难点:

利用磁标势解决具体问题

teaching objectives

1. 矢势的引入;

teaching objectives

1. 矢势的引入;
2. 矢势微分方程;

teaching objectives

1. 矢势的引入;
2. 矢势微分方程;
3. 矢势边值关系;

teaching objectives

1. 矢势的引入;
2. 矢势微分方程;
3. 矢势边值关系;
4. 静磁场能量;

teaching objectives

1. 矢势的引入;
2. 矢势微分方程;
3. 矢势边值关系;
4. 静磁场能量;

恒定电流磁场的基本方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

恒定电流磁场的基本方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

静磁场是有旋、无源场，磁感应线总是闭合曲线。一般情况下不能用标势描述。 由磁场的无源性:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

恒定电流磁场的基本方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

静磁场是有旋、无源场，磁感应线总是闭合曲线。一般情况下不能用标势描述。 由磁场的无源性:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

可引入矢量$\vec{A}$,使得:

恒定电流磁场的基本方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

静磁场是有旋、无源场，磁感应线总是闭合曲线。一般情况下不能用标势描述。 由磁场的无源性:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

可引入矢量$\vec{A}$,使得:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

恒定电流磁场的基本方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

静磁场是有旋、无源场，磁感应线总是闭合曲线。一般情况下不能用标势描述。 由磁场的无源性:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

可引入矢量$\vec{A}$,使得:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ 称为磁场的矢势。

矢势的物理意义:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

即，沿任一闭合回路的环量代表通过由该回路为边界的任一曲面的磁通量，而每点A无直接物理意义。

矢势的物理意义:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

即，沿任一闭合回路的环量代表通过由该回路为边界的任一曲面的磁通量，而每点A无直接物理意义。

矢势的不唯一性: 由 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$

矢势的物理意义：

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

即，沿任一闭合回路的环量代表通过由该回路为边界的任一曲面的磁通量，而每点A无直接物理意义。

矢势的不唯一性：由 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$
可推得：

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla\psi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

增加辅助条件（规范条件）：$\nabla \cdot \vec{A} = 0$

1.矢势的引入

把

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

代入 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$,可得

把

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

代入 $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$,可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}) \\ = \frac{1}{\mu} [\boldsymbol{\nabla}(\nabla \cdot \vec{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \vec{A}] = \vec{J} \qquad (1) \end{aligned}$$

利用 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$，得到

把

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

代入 $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$,可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \frac{1}{\mu} [\boldsymbol{\nabla}(\nabla \cdot \vec{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \vec{A}] = \vec{J} \end{aligned} \tag{1}$$

利用 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$，得到

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

or $\boldsymbol{\nabla}^2 A_i = -\mu J_i \quad i = 1, 2, 3$

与静电场方程 $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$形式相同。类比可得矢势微分方程的解:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')dV'}{r}$$

与静电场方程 $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$形式相同。类比可得矢势微分方程的解:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')dV'}{r}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \nabla\times(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r})dV' = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \nabla\frac{1}{r}\times\vec{J}(\vec{x}')dV'$$
$$= \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}dV'$$

对于线电流情形,作代换$\vec{J}dV' \rightarrow Id\vec{l}$, $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$,毕奥–萨伐尔定律

3.矢势边值关系

有两种介质界面上磁场边值关系可推得:

有两种介质界面上磁场边值关系可推得:

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$
$$\Rightarrow \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)=0$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}\Rightarrow$$
$$\vec{n}\times(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\vec{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\vec{A}_1)=\vec{\alpha}$$

取规范条件 $\nabla\cdot\vec{A}=0$, 可得 $\vec{A}_1=\vec{A}_2$.

磁场总能量

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

磁场总能量

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

因为 $\vec{B}\cdot\vec{H} = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H} = \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})$
$= \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot\vec{J}$

磁场总能量

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

因为 $\vec{B} \cdot \vec{H} = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})$

$= \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \vec{J}$

所以 $W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) dV + \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dV$

$= \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dV$

电流分布在外磁场中的相互作用能:

$$W = \frac{1}{2}\int (\vec{A} + \vec{A}_e) \cdot (\vec{J} + \vec{J}_e) dV = \frac{1}{2}\int (\vec{A} \cdot \vec{J}) dV$$

$$+ \frac{1}{2}\int (\vec{A}_e \cdot \vec{J}_e) dV + \frac{1}{2}\int (\vec{A} \cdot \vec{J}_e + \vec{A}_e \cdot \vec{J}) dV$$

电流分布在外磁场中的相互作用能:

$$W = \frac{1}{2}\int(\vec{A}+\vec{A}_e)\cdot(\vec{J}+\vec{J}_e)dV = \frac{1}{2}\int(\vec{A}\cdot\vec{J})dV$$

$$+\frac{1}{2}\int(\vec{A}_e\cdot\vec{J}_e)dV + \frac{1}{2}\int(\vec{A}\cdot\vec{J}_e+\vec{A}_e\cdot\vec{J})dV$$

相互作用能为: $W_i = \int(\vec{A}\cdot\vec{J}_e)dV = \int(\vec{A}_e\cdot\vec{J})dV$