镜像法
Image Method

刘艳红
山西大同大学物理与电子科学学院

October 14,2013

研究内容 (teaching objectives)

研究内容 (teaching objectives)

1. 边值问题的回顾

研究内容 (teaching objectives)

1. 边值问题的回顾
2. 一类特殊边值问题

研究内容 (teaching objectives)

1. 边值问题的回顾
2. 一类特殊边值问题
3. 镜像法处理特殊边值问题的基本思想

研究内容 (teaching objectives)

1. 边值问题的回顾
2. 一类特殊边值问题
3. 镜像法处理特殊边值问题的基本思想
4. 镜像法举例

教学目标 (teaching objectives)

教学目标 (teaching objectives)

1. 镜像法的基本概念

教学目标 (teaching objectives)

1. 镜像法的基本概念
2. 镜像法求解静电场

教学目标 (teaching objectives)

1. 镜像法的基本概念
2. 镜像法求解静电场

一、边值问题的回顾

一、边值问题的回顾

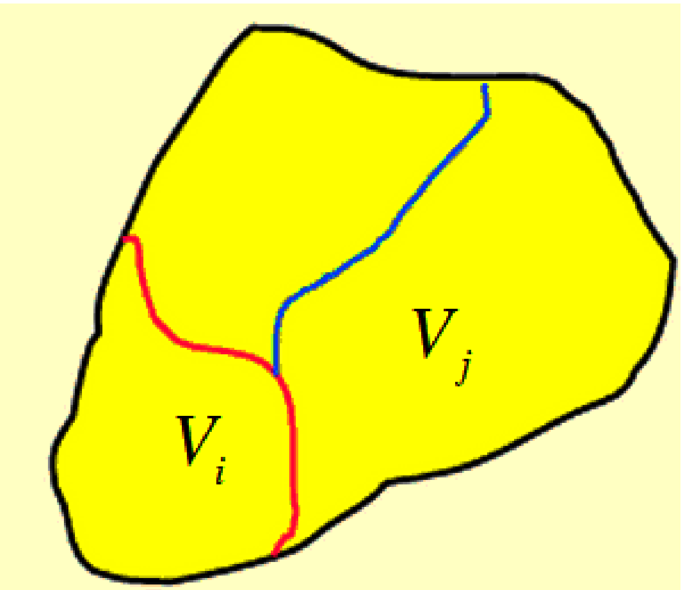
- 已知区域内存在自由电荷的分布，求解电势须求解Poisson方程:

一、边值问题的回顾

- 已知区域内存在自由电荷的分布，求解电势须求解Poisson方程:

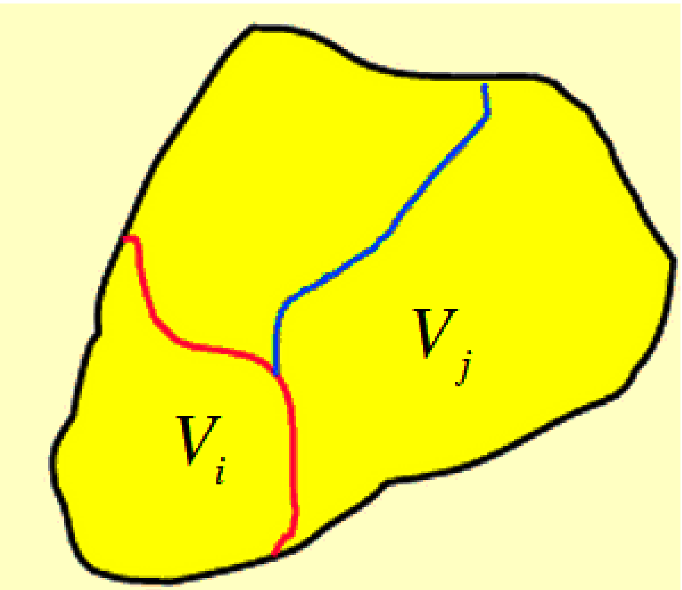
一、边值问题的回顾

- 已知区域内存在自由电荷的分布，求解电势须求解Poisson方程:



一、边值问题的回顾

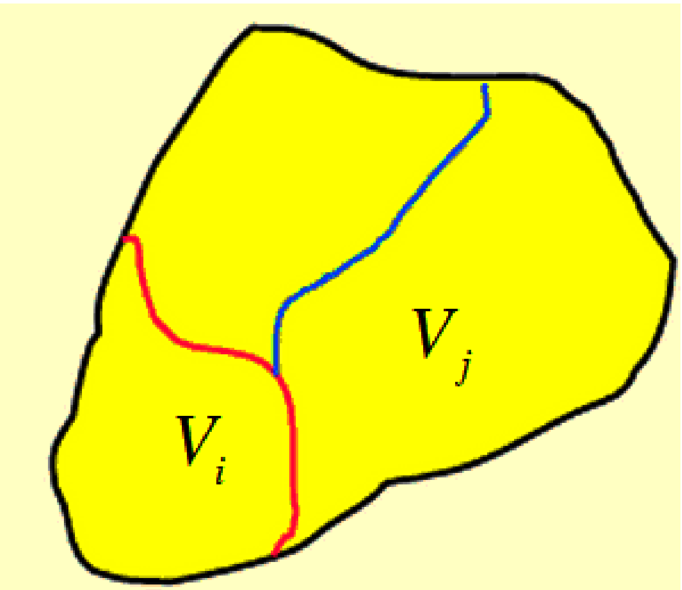
- 已知区域内存在自由电荷的分布，求解电势须求解Poisson方程:



根据前面的讨论知道：在所考虑的区域内没有自由电荷分布时，可用Laplace方程求解场分布(分离变量法)，在所考虑的区域内有自由电荷分布时，用非齐次微分方程Poisson方程求解场分布，求解过程变得复杂！

一、边值问题的回顾

- 已知区域内存在自由电荷的分布，求解电势须求解Poisson方程:

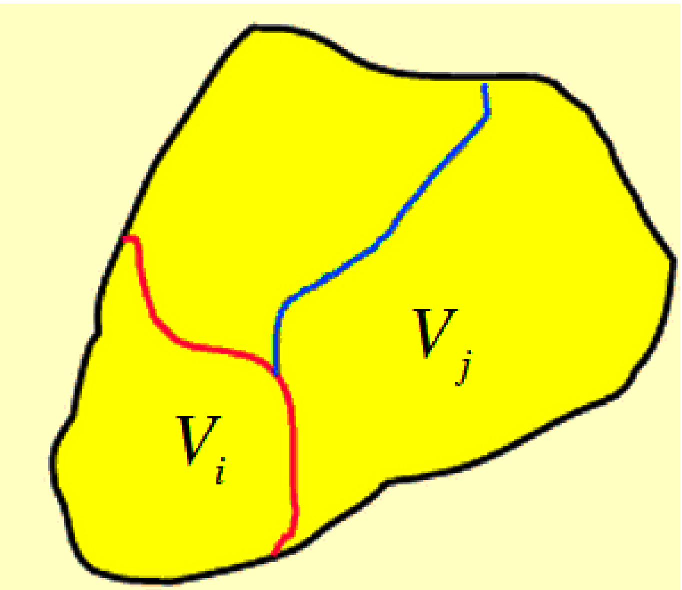


根据前面的讨论知道：在所考虑的区域内没有自由电荷分布时，可用Laplace方程求解场分布(分离变量法)，
在所考虑的区域内有自由电荷分布时，用非齐次微分方程Poisson方程求解场分布，求解过程变得复杂！

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_i} \qquad (1)$$

一、边值问题的回顾

- 已知区域内存在自由电荷的分布，求解电势须求解Poisson方程:



根据前面的讨论知道：在所考虑的区域内没有自由电荷分布时，可用Laplace方程求解场分布(分离变量法)，
在所考虑的区域内有自由电荷分布时，用非齐次微分方程Poisson方程求解场分布，求解过程变得复杂！

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_i} \tag{1}$$

一、边值问题的回顾

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
    - i)V'(介质)内给定ρ

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
  - i)V'(介质)内给定ρ
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
  - i)V'(介质)内给定ρ
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势ϕ_i

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
    - i)V'(介质)内给定ρ
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial \phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体i的电势ϕ_i

则V'内的电场唯一确定

- 第二类边值问题

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
    - i)V'(介质)内给定ρ
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体i的电势ϕ_i

则V'内的电场唯一确定

- 第二类边值问题
    - i)V'(介质)内给定ρ

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
  - i)V'(介质)内给定ρ
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势ϕ_i

则V'内的电场唯一确定

- 第二类边值问题
  - i)V'(介质)内给定ρ
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
  - i)V'(介质)内给定ρ
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势ϕ_i

则V'内的电场唯一确定

- 第二类边值问题
  - i)V'(介质)内给定ρ
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体上的电荷量Q_i

一、边值问题的回顾

- 第一类边值问题
    - i)V'(介质)内给定ρ
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体i的电势ϕ_i

则V'内的电场唯一确定

- 第二类边值问题
    - i)V'(介质)内给定ρ
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体上的电荷量Q_i

则V'内的电场唯一确定

二、重要的特殊情况

二、重要的特殊情况

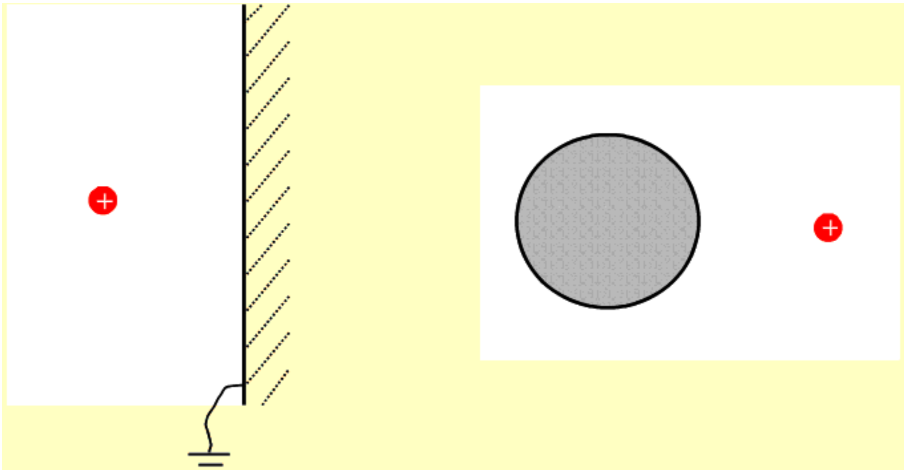
- 区域内只有一个或者几个点电荷

二、重要的特殊情况

- 区域内只有一个或者几个点电荷
- 区域内的导体或者介质边界是规则边界

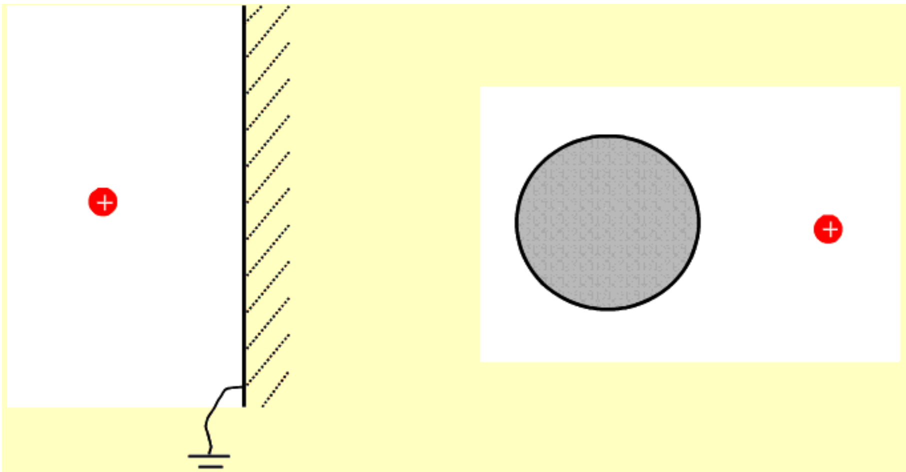
二、重要的特殊情况

- 区域内只有一个或者几个点电荷
- 区域内的导体或者介质边界是规则边界



二、重要的特殊情况

- 区域内只有一个或者几个点电荷
- 区域内的导体或者介质边界是规则边界



三、镜像法的基本思想

三、镜像法的基本思想

- 镜像法:

三、镜像法的基本思想

- 镜像法：

用假想点电荷来等效地代替导体边界面上的面电荷分布，然后用空间点电荷和等效点电荷迭加给出空间电势分布。

- 适用情况：

三、镜像法的基本思想

- 镜像法：

用假想点电荷来等效地代替导体边界面上的面电荷分布，然后用空间点电荷和等效点电荷迭加给出空间电势分布。

- 适用情况：

a)所求区域有少许几个点电荷，它产生的感应电荷一般可以用假想点电荷代替。

b)导体边界面形状比较规则，具有一定对称性。

c) 给定边界条件

三、镜像法的基本思想

三、镜像法的基本思想

- 注意:

三、镜像法的基本思想

- 注意:

a）做替代时，所研究空间的泊松方程不能被改变（即自由点电荷位置、Q 大小不能变）。所以假想电荷必须放在所求区域之外。
b）不能改变原有边界条件（实际是通过边界条件来确定假想电荷的大小和位置）。
c）一旦用了假想（等效）电荷，不再考虑原来的电荷分布。
d）坐标系选择仍然根据边界形状来定。

四、镜像法举例

四、镜像法举例

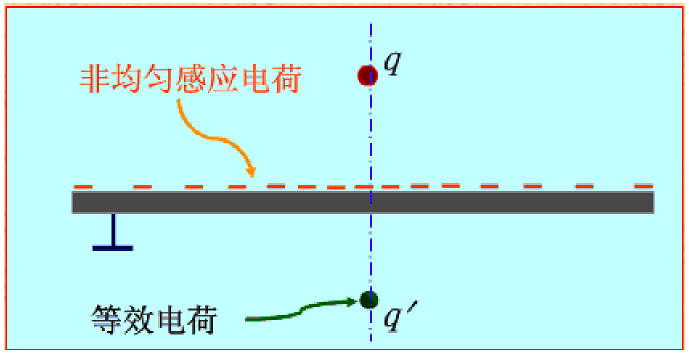
- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。

四、镜像法举例

- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。

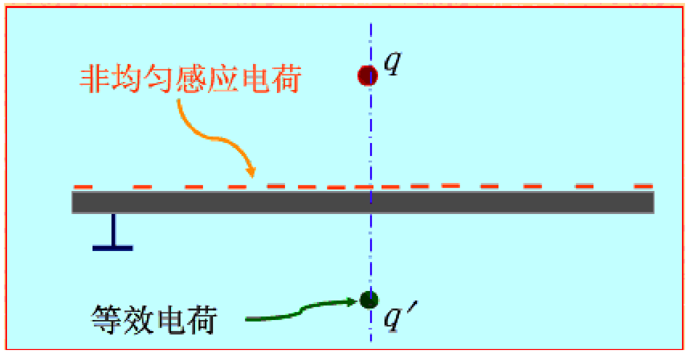
四、镜像法举例

- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。



四、镜像法举例

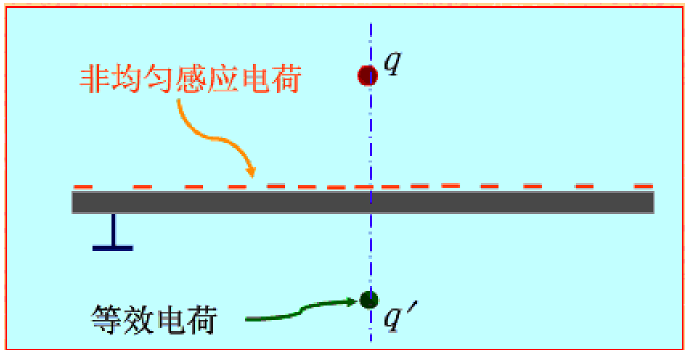
- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。



空间电场为点电荷和导体表面感应电荷共同激发

四、镜像法举例

- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。

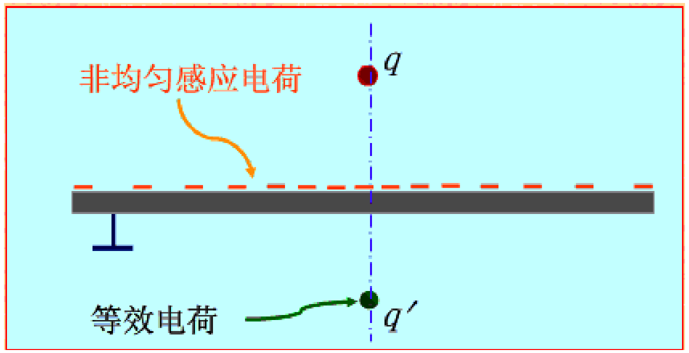


空间电场为点电荷和导体表面感应电荷共同激发

感应电荷在总电场的作用下达到静电平衡

四、镜像法举例

- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。



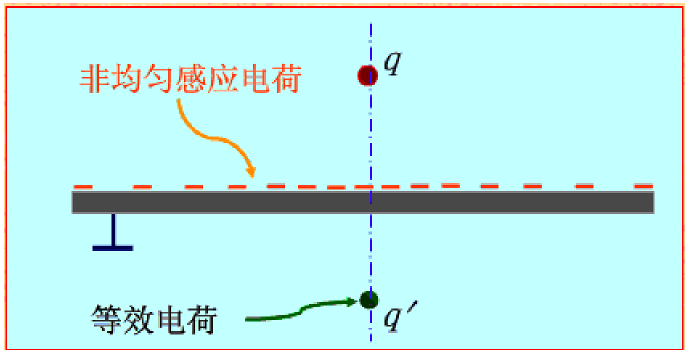
空间电场为点电荷和导体表面感应电荷共同激发

感应电荷在总电场的作用下达到静电平衡

静电平衡的要求：导体表面为一等势面，即ϕ=常数

四、镜像法举例

- 例一：接地无限大平面导体板附近有一点电荷Q，求空间电势。



空间电场为点电荷和导体表面感应电荷共同激发

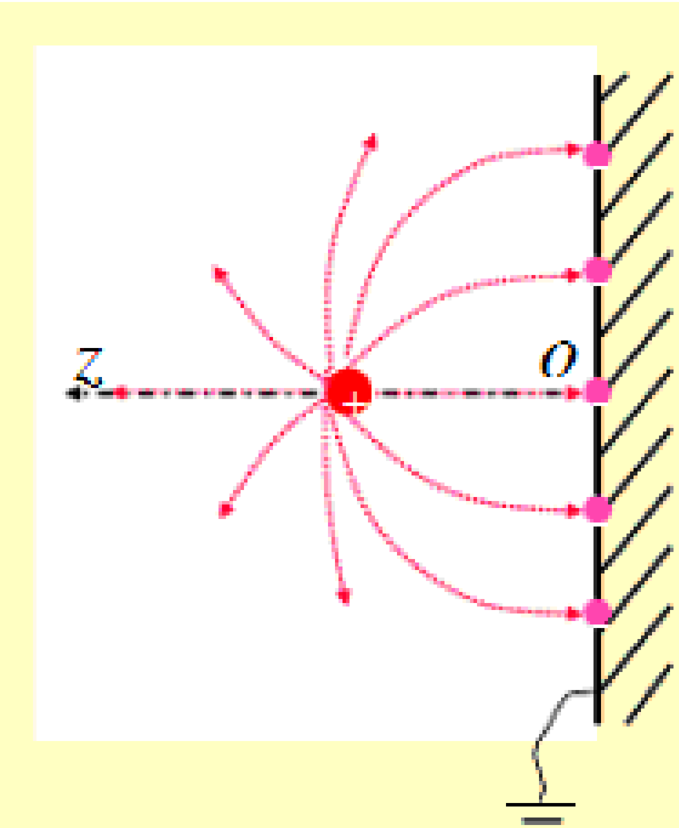
感应电荷在总电场的作用下达到静电平衡

静电平衡的要求：导体表面为一等势面，即ϕ=常数

四、镜像法举例

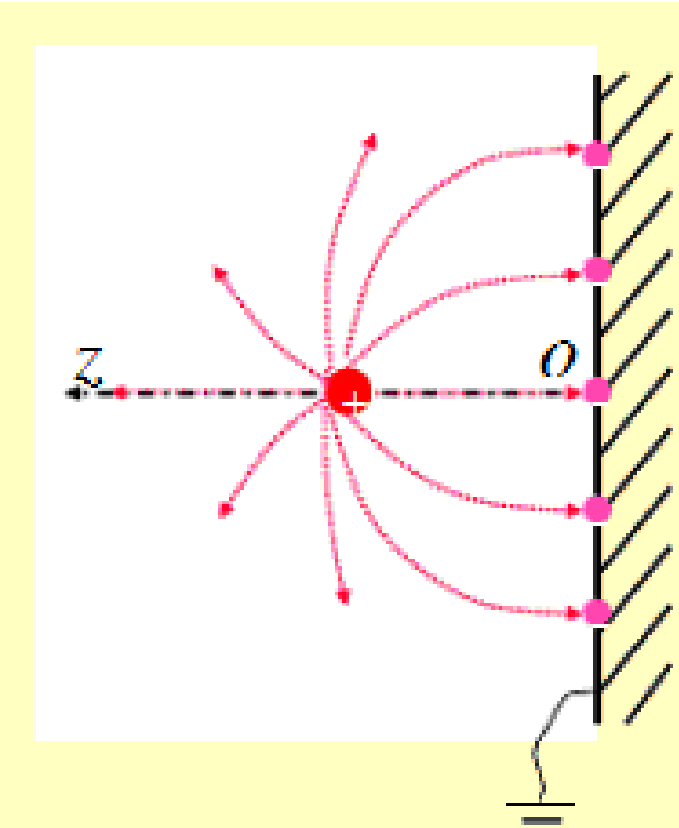
四、镜像法举例

四、镜像法举例



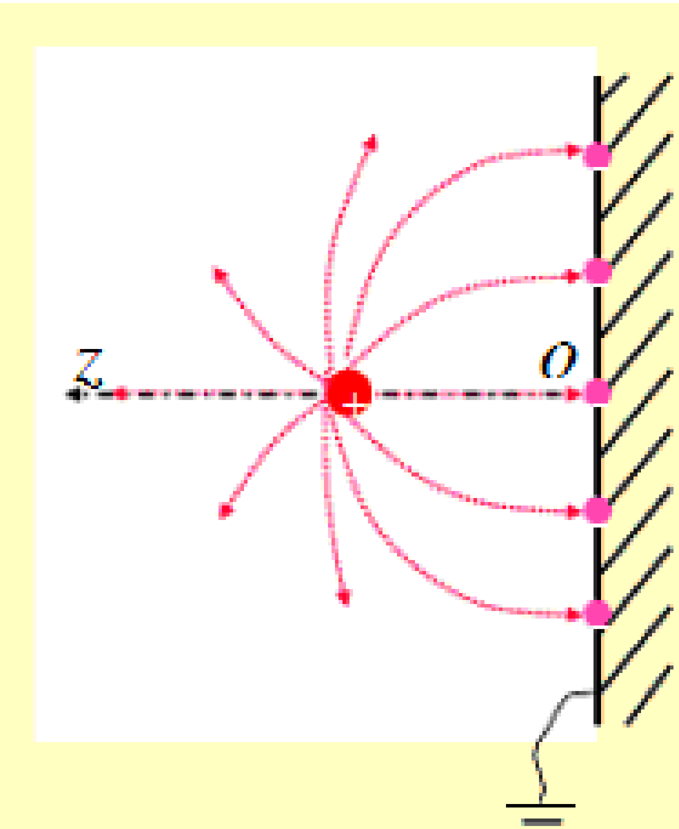
四、镜像法举例

区域内的电势可表示为:



四、镜像法举例

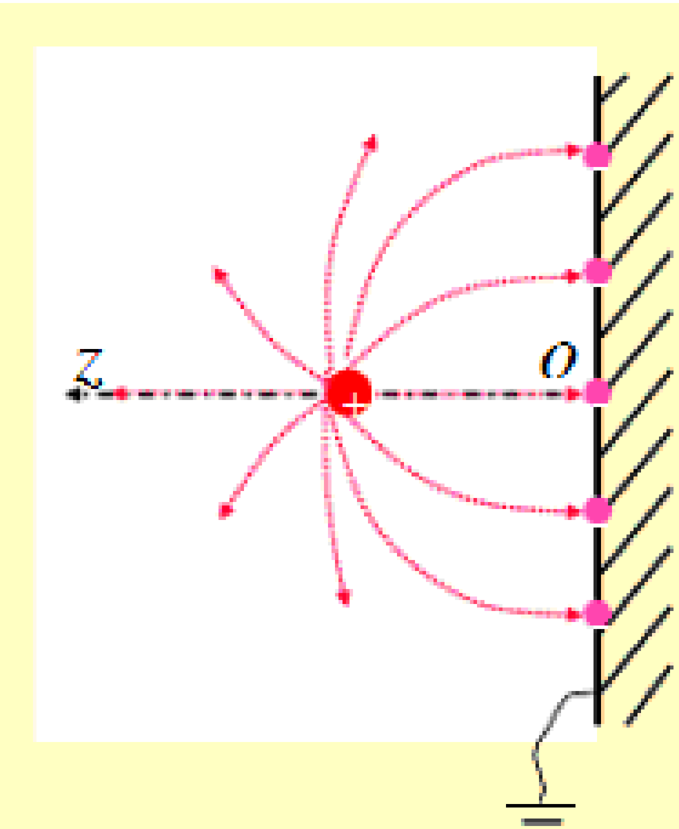
区域内的电势可表示为:



$$\phi = \phi_{point} + \phi_{plane} \tag{2}$$

四、镜像法举例

区域内的电势可表示为:

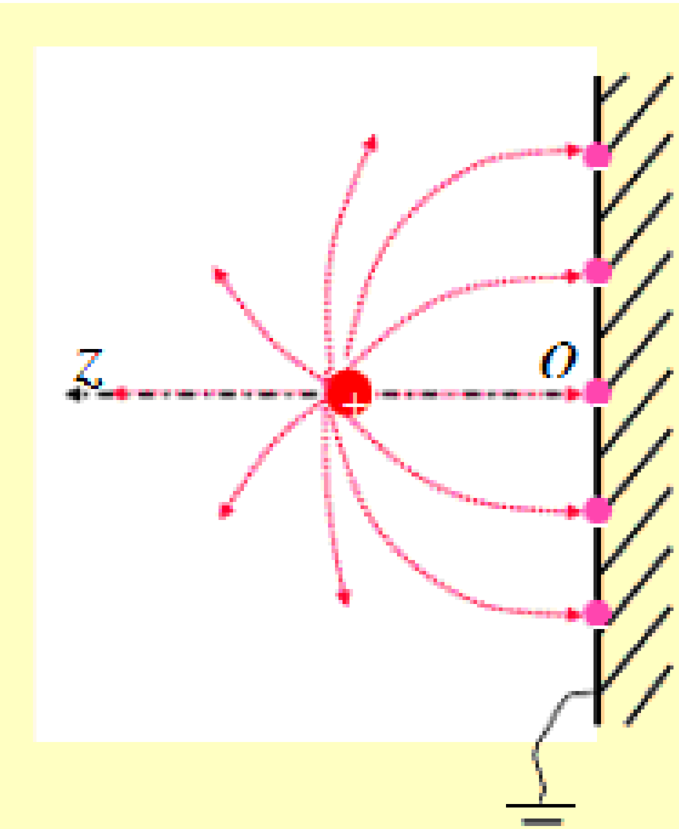


$$\phi = \phi_{point} + \phi_{plane} \tag{2}$$

$$\phi_{point} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \tag{3}$$

四、镜像法举例

区域内的电势可表示为:



$$\phi = \phi_{point} + \phi_{plane} \tag{2}$$

$$\phi_{point} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \tag{3}$$

$$\phi_{plane} = ?$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

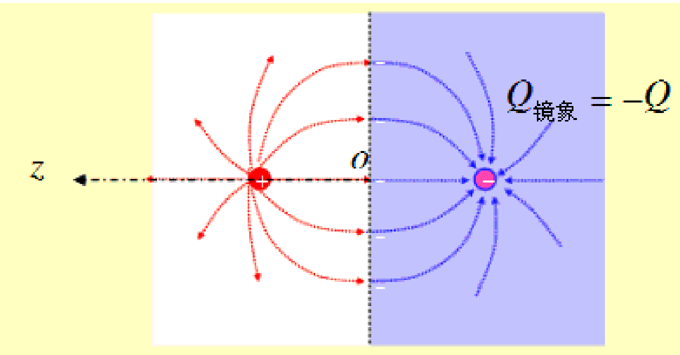
- 导体表面的电场线处处与表面相垂直，并且其分布具有对称性。

四、镜像法举例

- 导体表面的电场线处处与表面相垂直，并且其分布具有对称性。

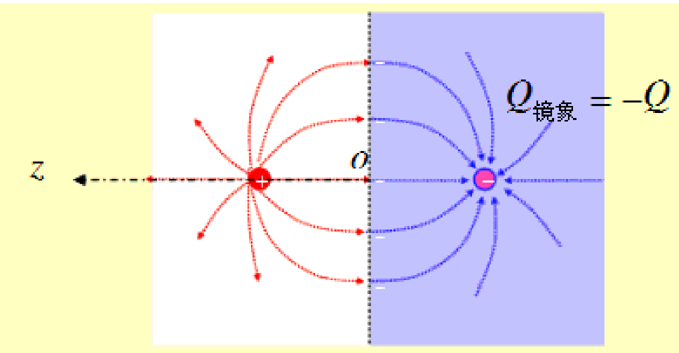
四、镜像法举例

- 导体表面的电场线处处与表面相垂直，并且其分布具有对称性。



四、镜像法举例

- 导体表面的电场线处处与表面相垂直，并且其分布具有对称性。

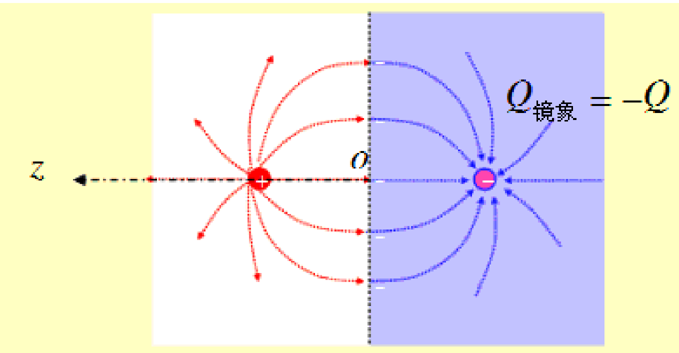


面电荷电势可以由图中假想电荷电势代替:

四、镜像法举例

- 导体表面的电场线处处与表面相垂直，并且其分布具有对称性。

面电荷电势可以由图中假想电荷电势代替：

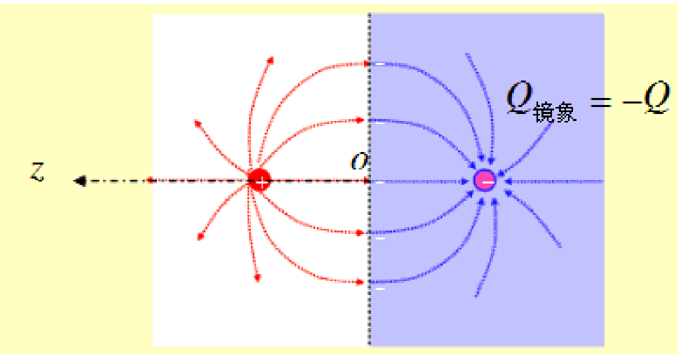


$$\phi_{imag}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \qquad (4)$$

四、镜像法举例

- 导体表面的电场线处处与表面相垂直，并且其分布具有对称性。

面电荷电势可以由图中假想电荷电势代替:



$$\phi_{imag} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \qquad (4)$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

- 这样问题的解可以认为是:

四、镜像法举例

- 这样问题的解可以认为是:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \tag{5}$$

可以验证:

$$\phi\mid_{z=0} = 0 \tag{6}$$

四、镜像法举例

- 这样问题的解可以认为是:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \tag{5}$$

可以验证:

$$\phi\mid_{z=0} = 0 \tag{6}$$

可见满足导体表面电势为零的边界条件。

四、镜像法举例

四、镜像法举例

既然:

$$\phi_{imag} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \tag{7}$$

四、镜像法举例

既然:

$$\phi_{imag} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \tag{7}$$

那么:

$$\nabla^2\phi_{image} = ? \tag{8}$$

四、镜像法举例

既然:

$$\phi_{imag} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \tag{7}$$

那么:

$$\nabla^2\phi_{image} = ? \tag{8}$$

利用关系式:

$$\nabla^2 r = 0(r \neq 0) \tag{9}$$

四、镜像法举例

既然:

$$\phi_{imag} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \qquad (7)$$

那么:

$$\nabla^2\phi_{image} = ? \qquad (8)$$

利用关系式:

$$\nabla^2 r = 0(r \neq 0) \qquad (9)$$

得到:

$$\nabla^2\phi_{imag}\mid_{z>0} = 0 \qquad (10)$$

四、镜像法举例

既然:

$$\phi_{imag} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\mathbf{Q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}(z>0) \tag{7}$$

那么:

$$\nabla^2\phi_{image} = ? \tag{8}$$

利用关系式:

$$\nabla^2 r = 0(r \neq 0) \tag{9}$$

得到:

$$\nabla^2\phi_{imag}\mid_{z>0} = 0 \tag{10}$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

四、镜像法举例

讨论以下几个问题:

- A.导体表面上的感应电荷密度

四、镜像法举例

讨论以下几个问题:

- A.导体表面上的感应电荷密度
- B.总感应电荷

四、镜像法举例

讨论以下几个问题:

- A.导体表面上的感应电荷密度
- B.总感应电荷
- C.点电荷受到的力

四、镜像法举例

讨论以下几个问题:

- A.导体表面上的感应电荷密度
- B.总感应电荷
- C.点电荷受到的力
- D.体系的能量

四、镜像法举例

讨论以下几个问题:

- A.导体表面上的感应电荷密度
- B.总感应电荷
- C.点电荷受到的力
- D.体系的能量

四、镜像法举例

四、镜像法举例

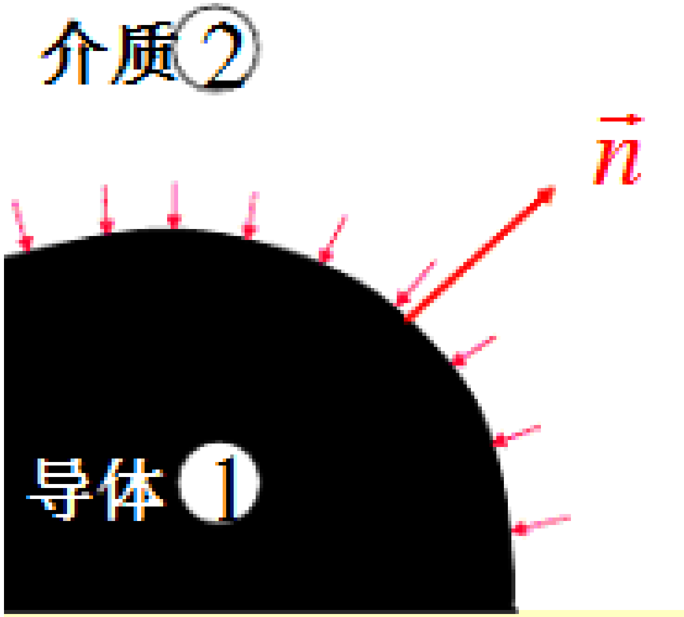
- A.导体表面上的感应电荷密度

四、镜像法举例

- A.导体表面上的感应电荷密度

四、镜像法举例

- A.导体表面上的感应电荷密度

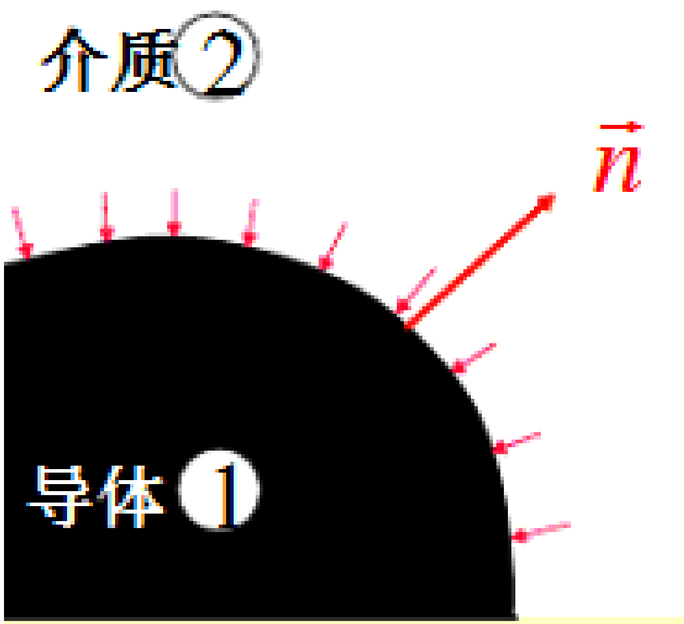


四、镜像法举例

- A.导体表面上的感应电荷密度

边界条件为：

$$\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$

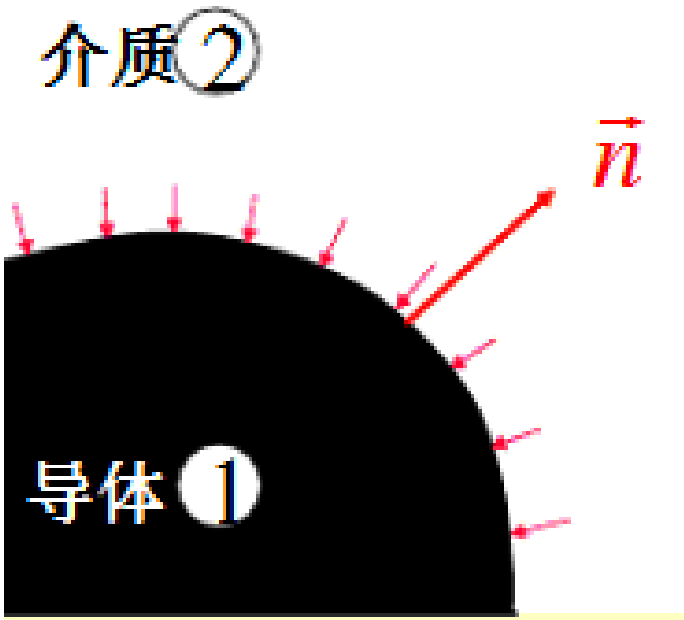


四、镜像法举例

- A.导体表面上的感应电荷密度

边界条件为:

$$\begin{cases} \phi = C \\ \epsilon \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{11}$$

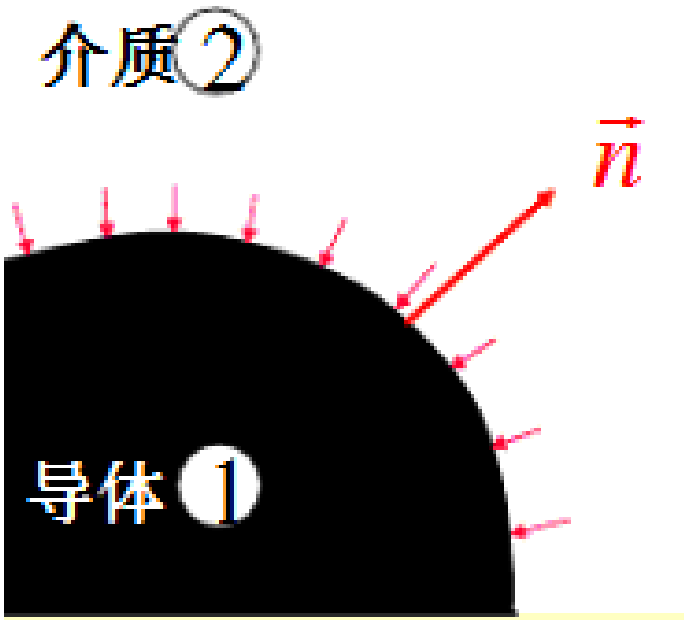


四、镜像法举例

- A.导体表面上的感应电荷密度

边界条件为:

$$\begin{cases} \phi = C \\ \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{11}$$



这样对例一中的ϕ可计算出导体表面电荷密度为:

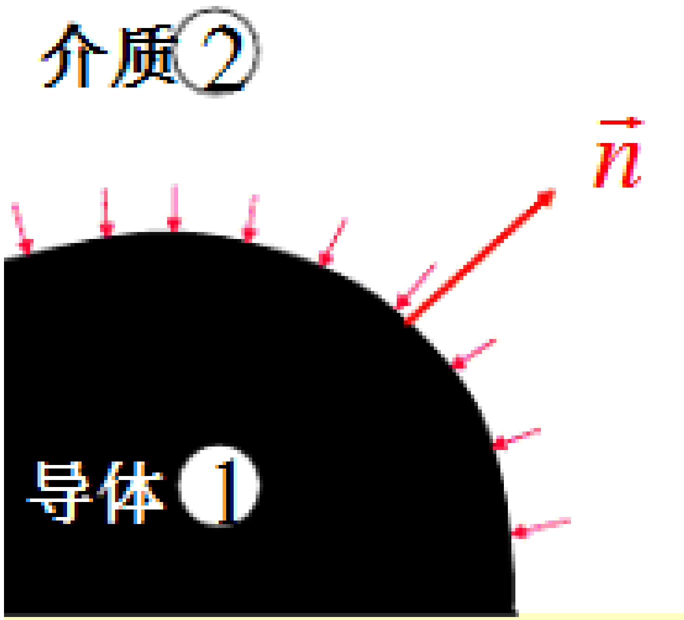
$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{z=0} = -\frac{aQ}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \tag{12}$$

四、镜像法举例

- A.导体表面上的感应电荷密度

边界条件为:

$$\begin{cases} \phi = C \\ \epsilon \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \qquad (11)$$



这样对例一中的ϕ可计算出导体表面电荷密度为:

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{z=0} = -\frac{aQ}{2\pi}\frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}} \qquad (12)$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

- B.总感应电荷

- B.总感应电荷

$$
\begin{aligned}
Q=\int \sigma dxdy &= -\frac{aQ}{2\pi}\int \frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{aQ}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{2\pi rdr}{(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad (13) \\
&= \frac{aQ}{\sqrt{a^2+r^2}}\Big|_0^{\infty} = -\mathbf{Q}_{imag}
\end{aligned}
$$

四、镜像法举例

- B.总感应电荷

$$
\begin{aligned}
Q = \int \sigma dxdy &= -\frac{aQ}{2\pi}\int \frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{aQ}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi rdr}{(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad (13) \\
&= \frac{aQ}{\sqrt{a^2+r^2}}\Big|_0^\infty = -\mathbf{Q}_{imag}
\end{aligned}
$$

镜像电荷的大小正是导体板上的感应电荷总量

四、镜像法举例

四、镜像法举例

- C.点电荷受到的力

四、镜像法举例

- C.点电荷受到的力

- 1.点电荷受到的力为导体表面的感应电荷所激发的电场对Q的作用力

四、镜像法举例

- C.点电荷受到的力

- 1.点电荷受到的力为导体表面的感应电荷所激发的电场对Q的作用力
- 2.而感应电荷在$z>0$区域激发的电场等价于镜像电荷在$z>0$ 区域的贡献

四、镜像法举例

- C.点电荷受到的力

- 1.点电荷受到的力为导体表面的感应电荷所激发的电场对Q的作用力
- 2.而感应电荷在$z>0$区域激发的电场等价于镜像电荷在$z>0$ 区域的贡献
- 3.电荷受到的电场力即为镜像电荷对它的作用力（吸引力）

四、镜像法举例

- C.点电荷受到的力

- 1.点电荷受到的力为导体表面的感应电荷所激发的电场对Q的作用力
- 2.而感应电荷在$z>0$区域激发的电场等价于镜像电荷在$z>0$ 区域的贡献
- 3.电荷受到的电场力即为镜像电荷对它的作用力（吸引力）

$$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{Q}^2}{4a^2} \tag{14}$$

四、镜像法举例

- C.点电荷受到的力

- 1.点电荷受到的力为导体表面的感应电荷所激发的电场对Q的作用力
- 2.而感应电荷在$z>0$区域激发的电场等价于镜像电荷在$z>0$ 区域的贡献
- 3.电荷受到的电场力即为镜像电荷对它的作用力（吸引力）

$$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{Q}^2}{4a^2} \tag{14}$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

- D.体系的能量

四、镜像法举例

- D.体系的能量

把电荷Q从无穷远移动到已知位置P点，所需要做的功为：

$$W = \int_{\infty}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4z^2} dz = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4a} \quad (15)$$

四、镜像法举例

- D.体系的能量

把电荷Q从无穷远移动到已知位置P点，所需要做的功为：

$$W = \int_{\infty}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4z^2} dz = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4a} \quad (15)$$

四、镜像法举例

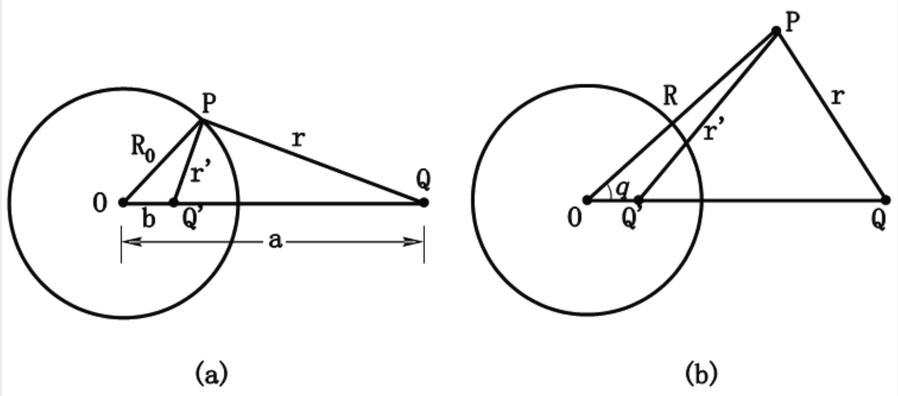
四、镜像法举例

- 例二：真空中有一半径R_0的接地导体球，距球心 $a(a > R_0)$处有一点电荷 **Q**，求空间各点电势。

四、镜像法举例

- 例二：真空中有一半径R_0的接地导体球，距球心 $a(a > R_0)$处有一点电荷 **Q**，求空间各点电势。

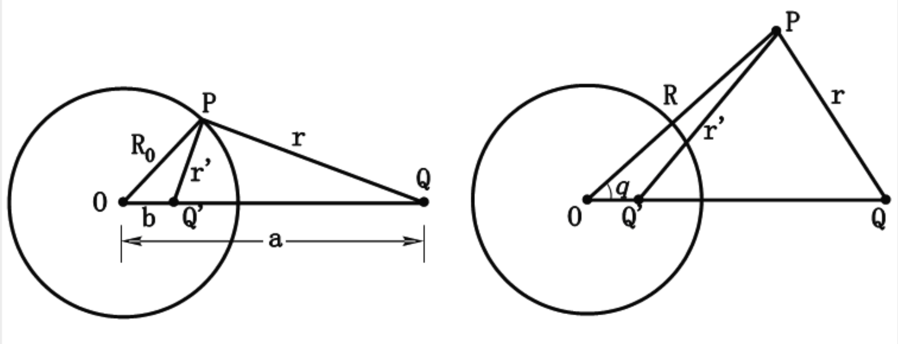
解：（1）分析：因导体球接地故球的电势为零。根据镜象法原则假想电荷应在球内。因空间只有两个点电荷，场应具有轴对称，故假想电荷应在线上，即极轴上。



四、镜像法举例

- 例二：真空中有一半径R_0的接地导体球，距球心 $a(a > R_0)$处有一点电荷 **Q**，求空间各点电势。

解：（1）分析：因导体球接地故球的电势为零。根据镜象法原则假想电荷应在球内。因空间只有两个点电荷，场应具有轴对称，故假想电荷应在线上，即极轴上。



(a) (b)

四、镜像法举例

四、镜像法举例

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}] \tag{16}$$

四、镜像法举例

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}] \tag{16}$$

(2)由边界条件确定$\mathbf{Q}'$和r',设$\overline{OQ'} = b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}] \tag{16}$$

(2)由边界条件确定$\mathbf{Q}'$和r',设$\overline{OQ'} = b$

$$\begin{cases} r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \\ r' = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta} \end{cases} \tag{17}$$

四、镜像法举例

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}] \tag{16}$$

(2)由边界条件确定$\mathbf{Q}'$和r',设$\overline{OQ'} = b$

$$\begin{cases} r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \\ r' = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta} \end{cases} \tag{17}$$

$$\phi\,|_{R_0} = 0, \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}\,|_{R_0} = 0 \tag{18}$$

四、镜像法举例

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}] \tag{16}$$

(2)由边界条件确定$\mathbf{Q}'$和r',设$\overline{OQ'} = b$

$$\begin{cases} r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \\ r' = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta} \end{cases} \tag{17}$$

$$\phi|_{R_0} = 0, \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}|_{R_0} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{Q^2}{r^2}|_{R_0} = \frac{Q'^2}{r'^2}|_{R_0} \tag{19}$$

四、镜像法举例

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}] \tag{16}$$

(2)由边界条件确定$\mathbf{Q}'$和r',设$\overline{OQ'} = b$

$$\begin{cases} r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \\ r' = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta} \end{cases} \tag{17}$$

$$\phi\,|_{R_0} = 0, \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}\,|_{R_0} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{Q^2}{r^2}\,|_{R_0} = \frac{Q'^2}{r'^2}\,|_{R_0} \tag{19}$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

$$Q^2(R_0^2+b^2)-2Q^2R_0b\cos\theta=Q'^2(R_0^2+a^2)-2Q'^2R_0a\cos\theta \tag{20}$$

四、镜像法举例

$$Q^2(R_0^2+b^2)-2Q^2R_0b\cos\theta=Q'^2(R_0^2+a^2)-2Q'^2R_0a\cos\theta \tag{20}$$

由于θ的任意性，

$$Q^2b=Q'^2a,\ Q^2(R_0^2+b^2)=Q'^2(R_0^2+a^2) \tag{21}$$

四、镜像法举例

$$Q^2(R_0^2+b^2)-2Q^2R_0b\cos\theta=Q'^2(R_0^2+a^2)-2Q'^2R_0a\cos\theta \tag{20}$$

由于θ的任意性，

$$Q^2b=Q'^2a,\ Q^2(R_0^2+b^2)=Q'^2(R_0^2+a^2) \tag{21}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

四、镜像法举例

$$Q^2(R_0^2+b^2)-2Q^2R_0b\cos\theta = Q'^2(R_0^2+a^2)-2Q'^2R_0a\cos\theta \tag{20}$$

由于θ的任意性，

$$Q^2b = Q'^2a, Q^2(R_0^2+b^2) = Q'^2(R_0^2+a^2) \tag{21}$$

$$\begin{cases} b = \frac{R_0^2}{a}, Q' = \pm\frac{R_0Q}{a} \\ b = a, Q' = \pm Q \end{cases} \tag{22}$$

四、镜像法举例

$$Q^2(R_0^2+b^2)-2Q^2R_0b\cos\theta=Q'^2(R_0^2+a^2)-2Q'^2R_0a\cos\theta \tag{20}$$

由于θ的任意性，

$$Q^2b=Q'^2a, Q^2(R_0^2+b^2)=Q'^2(R_0^2+a^2) \tag{21}$$

$$\begin{cases} b=\frac{R_0^2}{a}, Q'=\pm\frac{R_0Q}{a} \\ b=a, Q'=\pm Q \end{cases} \tag{22}$$

$$b=\frac{R_0^2}{a}, Q'=-\frac{R_0Q}{a} \tag{23}$$

四、镜像法举例

$$Q^2(R_0^2+b^2)-2Q^2R_0b\cos\theta=Q'^2(R_0^2+a^2)-2Q'^2R_0a\cos\theta \tag{20}$$

由于θ的任意性，

$$Q^2b=Q'^2a,\ Q^2(R_0^2+b^2)=Q'^2(R_0^2+a^2) \tag{21}$$

$$\begin{cases} b=\frac{R_0^2}{a},\ Q'=\pm\frac{R_0Q}{a} \\ b=a,\ Q'=\pm Q \end{cases} \tag{22}$$

$$b=\frac{R_0^2}{a},\ Q'=-\frac{R_0Q}{a} \tag{23}$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

四、镜像法举例

$$\begin{cases} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}} - \frac{R_0/a}{\sqrt{R^2+R_0^4/a^2-2RR_0^2\cos\theta/a}}](R > R_0) \\ \phi = 0(R \leq R_0) \end{cases} \tag{24}$$

四、镜像法举例

$$\begin{cases} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}} - \frac{R_0/a}{\sqrt{R^2+R_0^4/a^2-2RR_0^2\cos\theta/a}}](R > R_0) \\ \phi = 0(R \le R_0) \end{cases} \tag{24}$$

（3）讨论:

① $|Q'| = |Q|$，因此Q发出的电力线一部分会聚到导体球面上，剩余传到无穷远。

② 球面感应电荷分布

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial R}|_{R=R_0} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a^2 - R_0^2}{R_0(a^2 - R_0^2 - 2R_0 a\cos\theta)^{3/2}} \tag{25}$$

四、镜像法举例

$$\begin{cases} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}} - \frac{R_0/a}{\sqrt{R^2+R_0^4/a^2-2RR_0^2\cos\theta/a}}\right](R > R_0) \\ \phi = 0(R \leq R_0) \end{cases} \tag{24}$$

（3）讨论:

① $|Q'| = |Q|$，因此Q发出的电力线一部分会聚到导体球面上，剩余传到无穷远。

② 球面感应电荷分布

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial R}|_{R=R_0} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a^2 - R_0^2}{R_0(a^2 - R_0^2 - 2R_0 a\cos\theta)^{3/2}} \tag{25}$$

四、镜像法举例

四、镜像法举例

$$Q' = \oint_{R=R_0} \boldsymbol{\sigma} dS = -\frac{R_0 Q}{a} \tag{26}$$

四、镜像法举例

$$Q' = \oint_{R=R_0} \sigma dS = -\frac{R_0 Q}{a} \tag{26}$$

导体球接地后，感应电荷总量不为零，可认为电荷$Q'' = -Q' = \frac{R_0 Q}{a}$移到地中去了。

（4）若导体不接地，可视为Q''分布在导体面上。不接地导体已为等势体，加上Q''还要使导体为等势体，Q''必须均匀分布在球面上。这时导体球上总电量$Q' + Q'' \equiv 0$（因为均匀分布球面上可使导体产生的电势等效于在球心的点电荷产生的电势）。

等效电荷一般是一个点电荷组或一个带电体系，而不一定就是一个点电荷。

四、镜像法举例

四、镜像法举例

（5）若导体球不接地，且带上自由电荷Q_0，导体上总电荷为Q_0，此时要保持导体为等势体，Q_0也应均匀分布在球面上。

$$\phi_2 = \phi + \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{27}$$

四、镜像法举例

（5）若导体球不接地，且带上自由电荷Q_0，导体上总电荷为Q_0，此时要保持导体为等势体，Q_0也应均匀分布在球面上。

$$\phi_2 = \phi + \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{27}$$

6）导体球不接地而带自由电荷Q_0 时,Q所受到的作用力可以看作Q_0与Q'及位于球心处的等效电荷Q'' 的作用力之和。

四、镜像法举例

四、镜像法举例

$$F=\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0(a-b)^2}+\frac{Q(Q_0+Q'')}{4\pi\epsilon_0 a^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{QQ_0}{a^2}-\frac{Q^2R_0^3(2a^2-R_0^2)}{a^3(a^2-R_0^2)^2}] \tag{28}$$

四、镜像法举例

$$F=\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0(a-b)^2}+\frac{Q(Q_0+Q'')}{4\pi\epsilon_0 a^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{QQ_0}{a^2}-\frac{Q^2R_0^3(2a^2-R_0^2)}{a^3(a^2-R_0^2)^2}] \qquad (28)$$

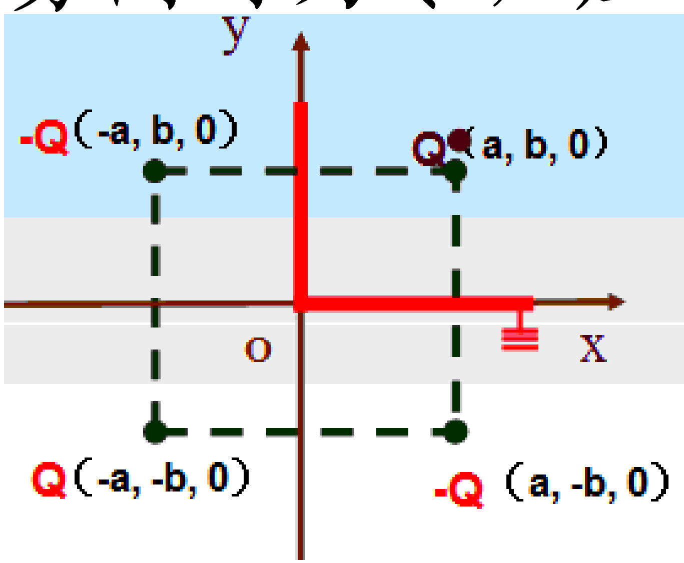
设$Q_0>0$，$Q>0$，第一项为排斥力，第二项为吸引力（与Q_0 无关，与Q 正负无关）。
当$a\to R_0$时，$F<0$，即正电荷与带正电导体球在靠的很近时会出现相互吸引。

四、镜像法举例

四、镜像法举例

- 例三、有一点电荷Q 位于两个互相垂直的半无限大接地导体板所围成的直角空间内，它到两个平面的距离为 a 和 b，求空间的电势。

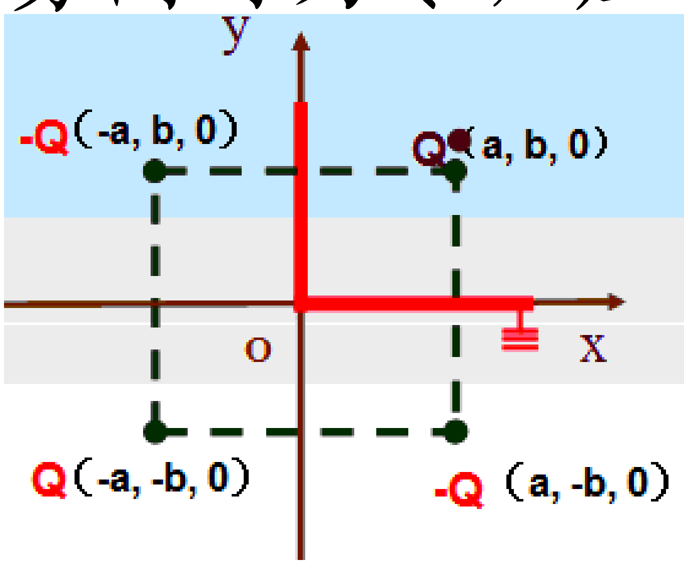
解：（1）分析：假想电荷应在第 I 象限之外。要保证互相垂直的两个接地导体板的电势同时为零，应当放几个电荷？



四、镜像法举例

- 例三、有一点电荷Q 位于两个互相垂直的半无限大接地导体板所围成的直角空间内，它到两个平面的距离为 a 和 b，求空间的电势。

解：（1）分析：假想电荷应在第 I 象限之外。要保证互相垂直的两个接地导体板的电势同时为零，应当放几个电荷？



四、镜像法举例

四、镜像法举例

- （2）电势分布

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

四、镜像法举例

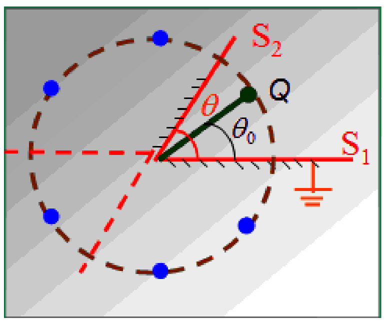
- （2）电势分布

$$\begin{cases} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}} \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \tag{29}$$

四、镜像法举例

- （2）电势分布

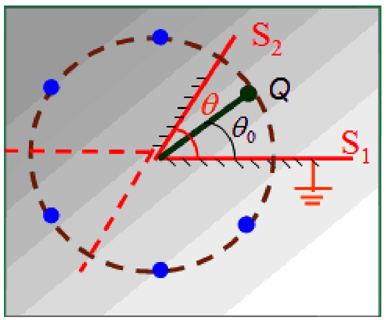
$$\begin{cases} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}} \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \tag{29}$$



四、镜像法举例

- （2）电势分布

$$\begin{cases}\phi=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\\-\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\\x>0,y>0\end{cases} \quad (29)$$



- （3）若两平面夹角$\theta<\frac{\pi}{2}$

Q放在$\theta_0(<\theta)$处用镜象法求解的条件是什么？