



中国矿业大学
China University of Mining & Technology

多媒体课堂教学课件

工程力学

Engineering Mechanics

主讲教师：钟卫平

制作与设计 钟卫平

2009~2010 Copyright © 钟卫平 All Rights Reserved



中国矿业大学

China University of Mining & Technology

第十四章 复杂应力状态强度问题

2009~2010 Copyright © 钟卫平 All Rights Reserved

第十四章

Chapter 14

复杂应力状态强度问题

Theories of Failure and Their Applications

§ 14.1 引言

一、问题的提出

- 单向拉伸强度条件

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n} \quad \sigma_u = \begin{cases} \sigma_s (\text{塑}) \\ \sigma_b (\text{脆}) \end{cases}$$

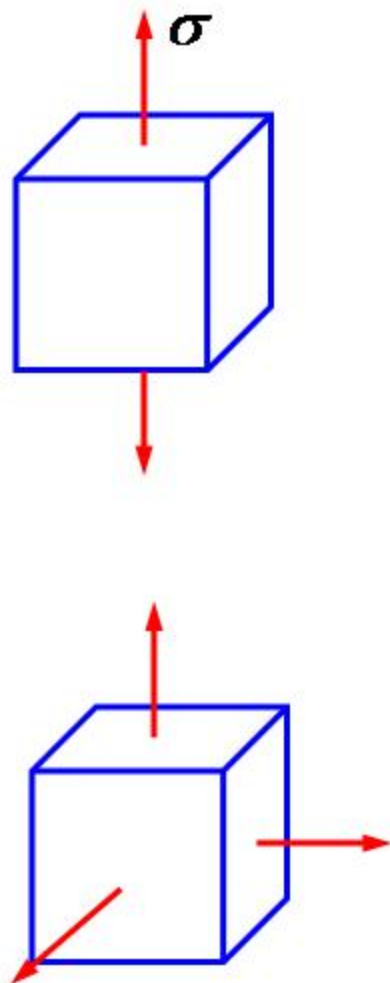
σ_s , σ_b 实验易测

- 复杂应力状态建立强度条件的困难

三向加载实验困难

⇒ $\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3$ 无数组合
 $\sigma_{1u} \quad \sigma_{2u} \quad \sigma_{3u}$ 无数组合

实验量大，总结规律困难



二、 研究目的

利用简单应力状态实验结果
建立复杂应力状态强度条件

三、 研究途径

寻找引起材料破坏或失效的共同规律
确定复杂应力的相当（单向拉伸）应力 σ_r

四、 强度理论

——关于材料破坏或失效规律的假说

五、 两类强度理论

1. 两类破坏形式

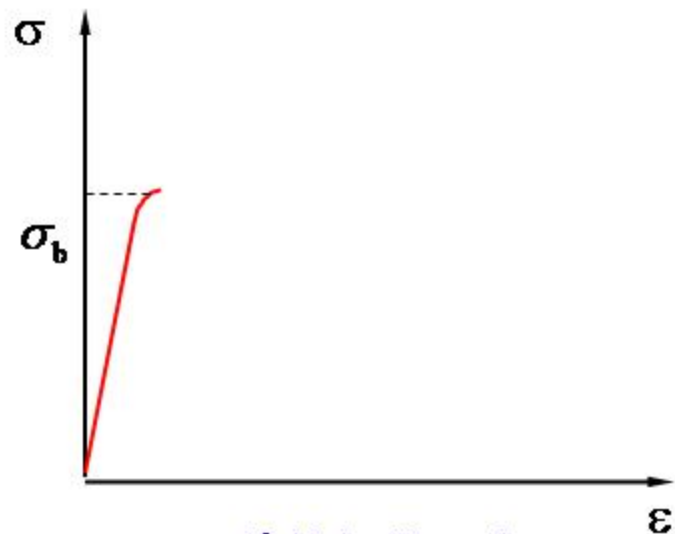
脆性材料: 断裂

塑性材料: 屈服

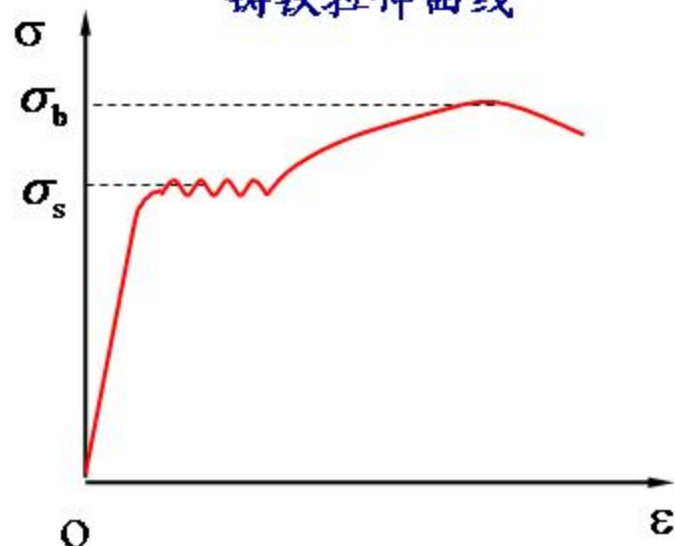
2. 两类强度理论

关于断裂的强度理论

关于屈服的强度理论



铸铁拉伸曲线



低碳钢拉伸曲线

§ 14.2 关于脆断的强度理论

1.最大拉应力理论（第一强度理论）

它假定：无论材料内各点的应力状态如何，只要有一点点的主应力 σ_1 达到单向拉伸断裂时的极限应力 σ_u ，材料即破坏。

在单向拉伸时，极限应力 $\sigma_u = \sigma_b$

失效条件可写为 $\sigma_1 \geq \sigma_b$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$$

第一强度强度条件： $\sigma_1 \leq [\sigma]$

试验证明，这一理论与铸铁、岩石、砂、陶瓷、玻璃等脆性材料的拉断试验结果相符，这些材料在轴向拉伸时的断裂破坏发生于拉应力最大的横截面上。脆性材料的扭转破坏，也是沿拉应力最大的斜面发生断裂，这些都与最大拉应力理论相符，但这个理论没有考虑其它两个主应力的影响。

2.最大拉应变理论（第二强度理论）

- 它假定，无论材料内各点的应变状态如何，只要有一点的最大伸长正应变 ε_1 达到单向拉伸断裂时正应变的极限值 ε_u ，材料即破坏。
- 所以发生脆性断裂的条件是 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_u$
- 若材料直到脆性断裂都是在线弹性范围内工作，则

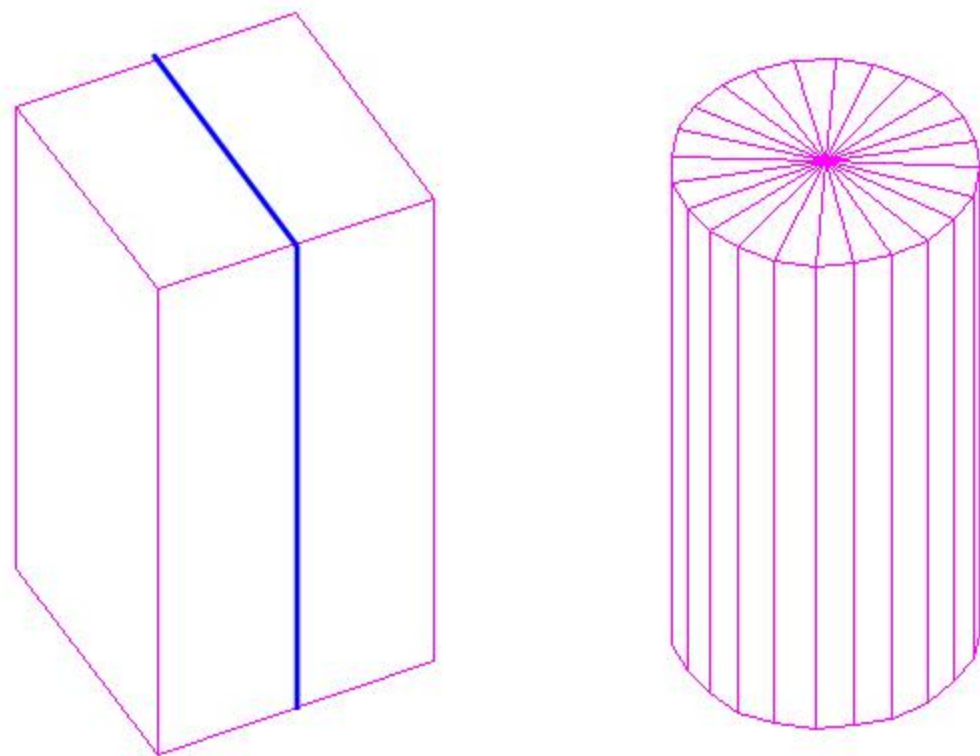
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{E} = \frac{\sigma_b}{E}$$

- 由此导出失效条件的应力表达式为：

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \geq \sigma_b \quad [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$$

第二强度条件： $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

- 煤、石料或砼等材料在轴向压缩试验时，如端部无摩擦，试件将沿垂直于压力的方向发生断裂，这一方向就是最大伸长正应变的方向，这与第二强度理论的结果相近。



§ 14.3 关于屈服的强度理论

1. 最大切应力理论 (第三强度理论)

➤ 它假定, 无论材料内各点的应力状态如何, 只要有一点的最大切应力 τ_{\max} 达到单向拉伸屈服切应力 τ_s 时, 材料就在该处出现明显塑性变形或屈服。

➤ 屈服破坏条件是: $\tau_{\max} \geq \tau_s$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$$

➤ 用应力表示的屈服破坏条件: $\sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_s$ $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$

第三强度条件: $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

- 第三强度理论曾被许多塑性材料的试验结果所证实，且稍偏于安全。这个理论所提供的计算式比较简单，故它在工程设计中得到了广泛的应用。该理论没有考虑中间主应力 σ_2 的影响，其带来的最大误差不超过15%，而在大多数情况下远比此为小。

2 畸变能理论(第四强度理论)

- 它假定，复杂应力状态下材料的形状改变比能达到单向拉伸时使材料屈服的形状改变比能时，材料即会发生屈服。
- 屈服破坏条件是：

$$u_f \geq u_u$$

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

- 简单拉伸时： $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$u_u = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_s^2$$

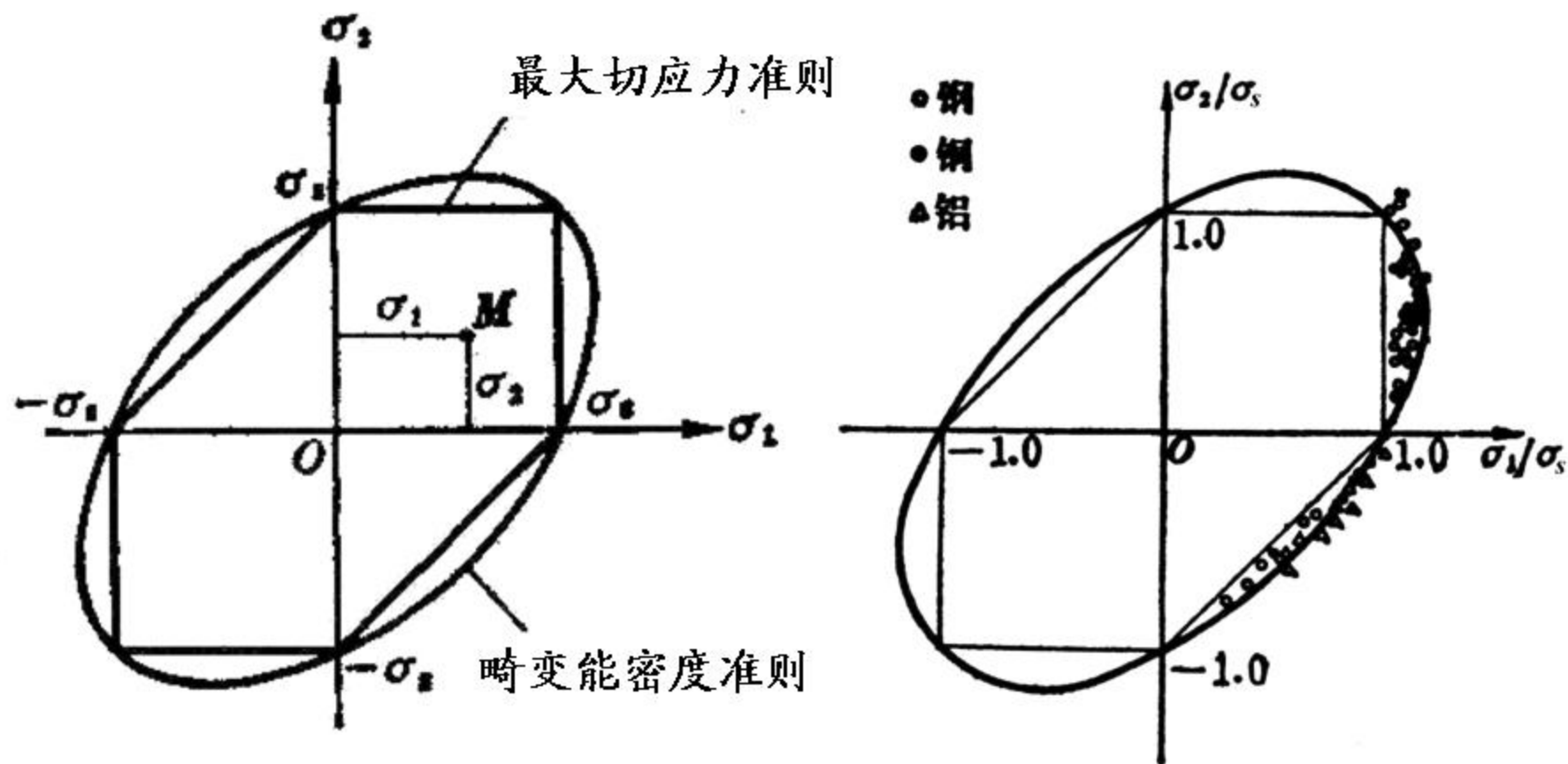
屈服破坏条件是： $\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \geq \sigma_s$

第四强度条件： $\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \leq [\sigma]$

➤ 这个理论和许多塑性材料的试验结果相符，用这个理论判断碳素钢的屈服失效是相当准确的。

● 第三强度理论和第四强度理论的图形

在二向应力状态下，第三强度理论和第四强度理论的图形为



➤ 四个强度理论的强度条件可写成统一形式:

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

σ_r 称为相当应力

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

- 一般说来，在常温和静载的条件下，脆性材料多发生脆性断裂，故通常采用第一、第二强度理论；塑性材料多发生塑性屈服，故应采用第三、第四强度理论。

影响材料的脆性和塑性的因素很多，例如：低温能提高脆性，高温一般能提高塑性；在高速动载荷作用下脆性提高，在低速静载荷作用下保持塑性。

- 无论是塑性材料或脆性材料：

在三向拉应力接近相等的情况下，都以断裂的形式破坏，所以应采用最大拉应力理论；

在三向压应力接近相等的情况下，都可以引起塑性变形，所以应该采用第三或第四强度理论。

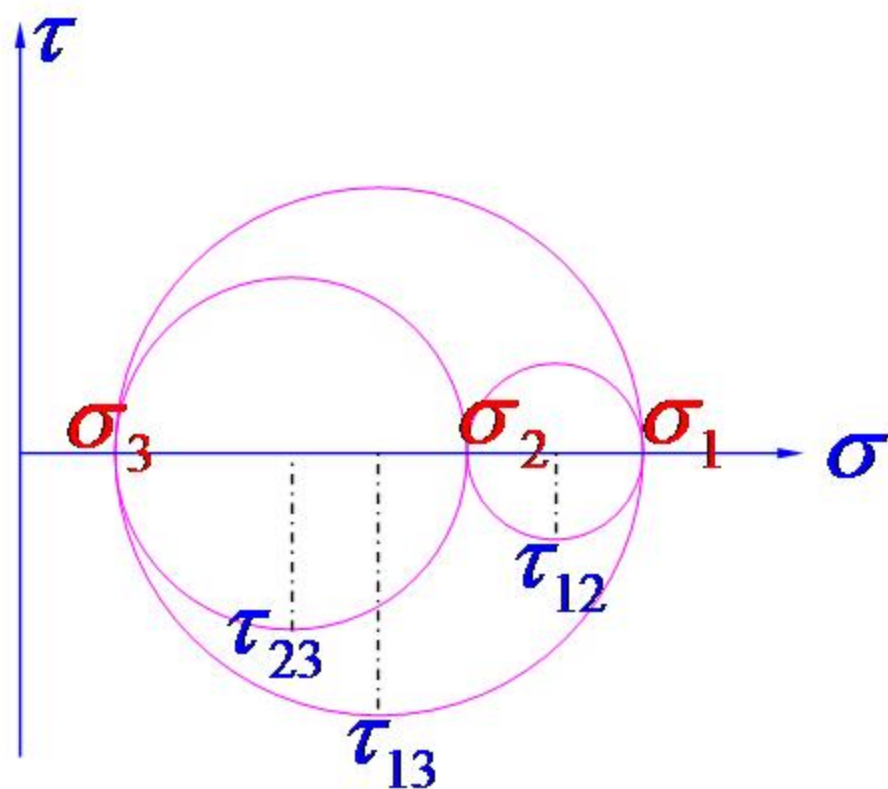
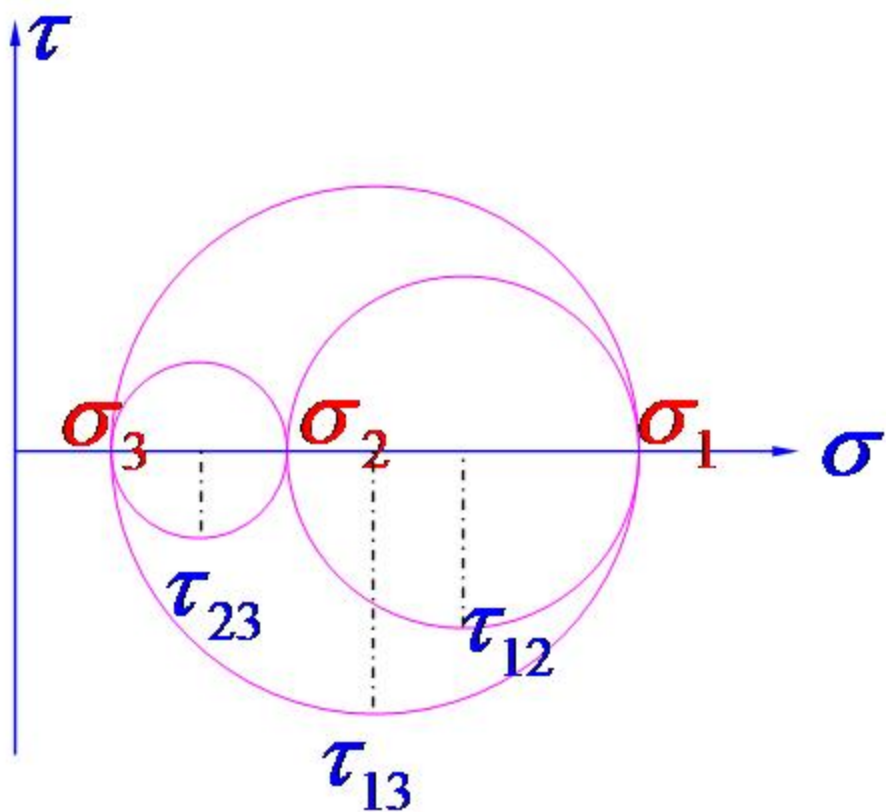
补充:

双切应力强度理论

西安交通大学俞茂宏教授1961年提出的。

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (a)$$

它认为不仅最大切应力，而且中间切应力也将影响材料的屈服。



➤由以上三式可见:

$$\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$$

C由材料单轴拉伸试验的屈服极限来确定

➤屈服破坏条件是:

$$\tau_{13} + \tau_{12} = C \quad (\tau_{12} \geq \tau_{23}) \quad (b)$$

或:

$$\tau_{13} + \tau_{23} = C \quad (\tau_{12} \leq \tau_{23}) \quad (c)$$

将(a)代入(b)和(c),屈服条件可改写为:

或:

$$\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] = C \quad (\tau_{12} \geq \tau_{23})$$
$$\left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \right] = C \quad (\tau_{12} \leq \tau_{23})$$

双切应力强度条件:

$$\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \leq [\sigma] \quad \left(\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right)$$

或:

$$\left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \right] \leq [\sigma] \quad \left(\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right)$$

➤ 该理论与大多数金属材料的实验结果符合得较好，对于铝合金在复杂应力状态下的实验结果，较第四强度理论更为接近。该理论也适用于岩石、土壤、混凝土等材料，并与实验结果有良好的一致性。

例：填空题。

➤ 在纯剪切应力状态下：

➤ 用第三强度理论可得出：塑性材料的许用切

应力与许用拉应力之比 $\frac{[\tau]}{[\sigma]} =$

➤ 用第四强度理论可得出：塑性材料的许用切

应力与许用拉应力之比 $\frac{[\tau]}{[\sigma]} =$

解：在纯剪切应力状态下，三个主应力分别为

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

第三强度理论的强度条件为：

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \leq [\sigma]$$

由此得：
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

剪切强度条件为：
$$\tau \leq [\tau]$$

按第三强度理论可求得：
$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

第四强度理论的强度条件为:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3} \tau \leq [\sigma]$$

由此得: $\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

剪切强度条件为: $\tau \leq [\tau]$

按第三强度理论可求得: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

例：填空题。

➤ 在纯剪切应力状态下：

➤ 用第三强度理论可得出：塑性材料的许用切

应力与许用拉应力之比 $\frac{[\tau]}{[\sigma]} = 0.5$

➤ 用第四强度理论可得出：塑性材料的许用切

应力与许用拉应力之比 $\frac{[\tau]}{[\sigma]} = 0.577$

例：填空题。

- 第三强度理论和第四强度理论的相当应力分别为 σ_{r3} 及 σ_{r4} ，对于纯剪切应力状态，恒有 $\sigma_{r3} / \sigma_{r4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

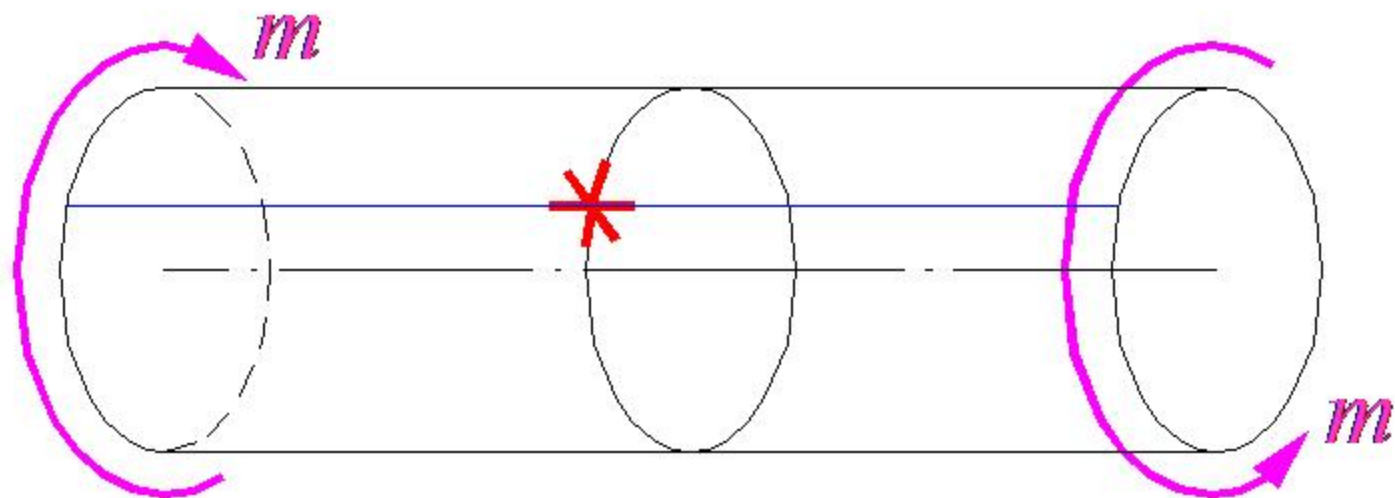
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\tau$$

例：圆轴直径为 d ，材料的弹性模量为 E ，泊松比为 μ ，为了测得轴端的力偶 m 之值，但只有一枚电阻片。

(1) 试设计电阻片粘贴的位置和方向；

(2) 若按照你所定的位置和方向，已测得正应变为 ε_0 ，则外力偶 $m = ?$



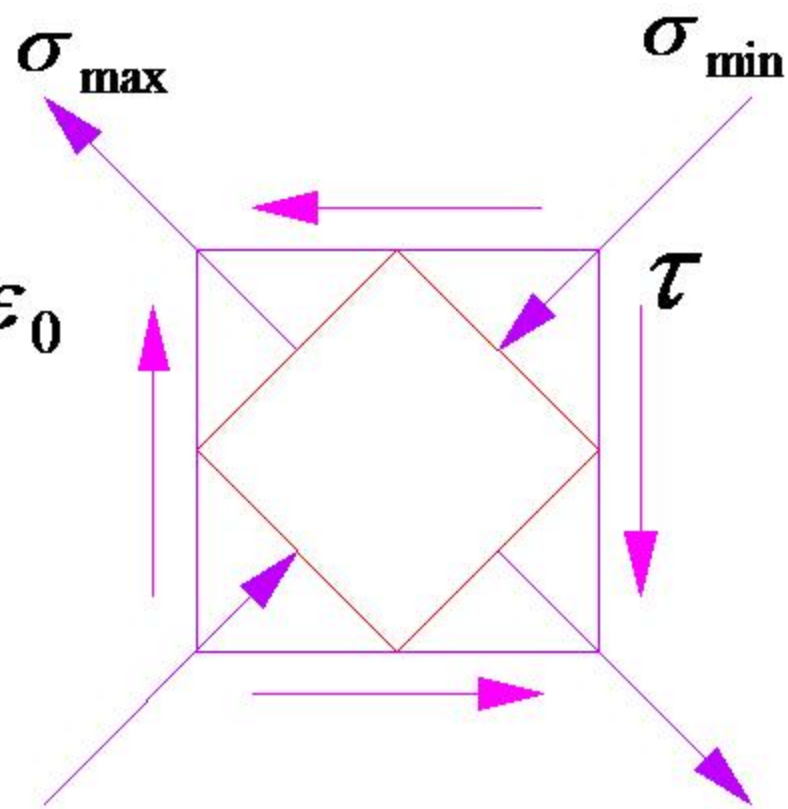
解: (1) 将应变片贴于与母线成 45° 角的外表面上

$$(2) \sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$

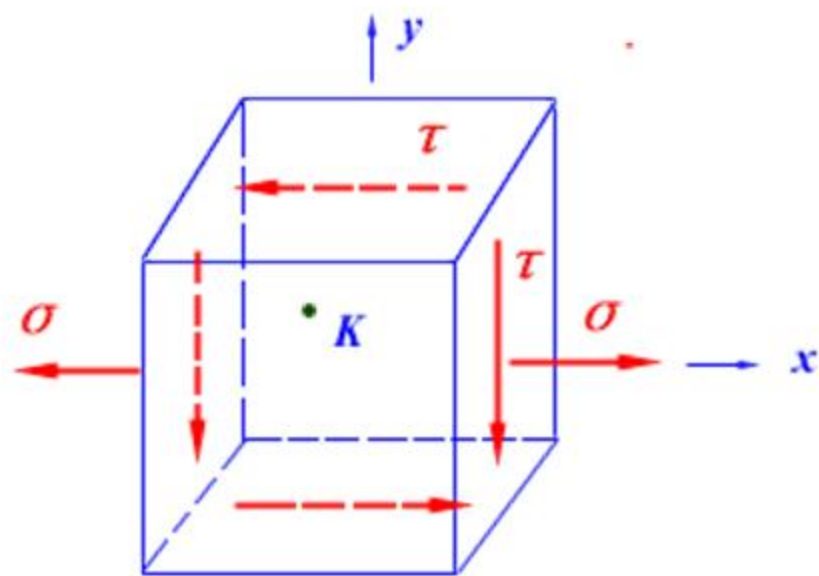
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$= \frac{1 + \mu}{E} \tau = \frac{1 + \mu}{E} \frac{m}{\frac{\pi d^3}{16}} = \varepsilon_0$$

$$m = \frac{\pi d^3 E \varepsilon_0}{16(1 + \mu)}$$



例：图示应力状态，试根据第三、第四强度理论建立相应的强度条件。



解：1. 求单元体的主应力：

$$\sigma_x = \sigma, \sigma_y = 0, \tau_x = \tau$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$
$$\sigma_{\min}$$

$$\therefore \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

2、建立强度条件

按第三强度理论:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

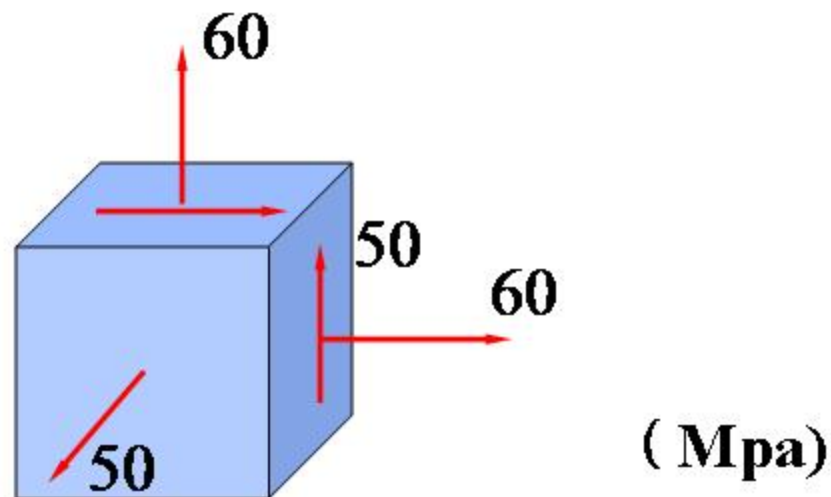
$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

按第四强度理论:

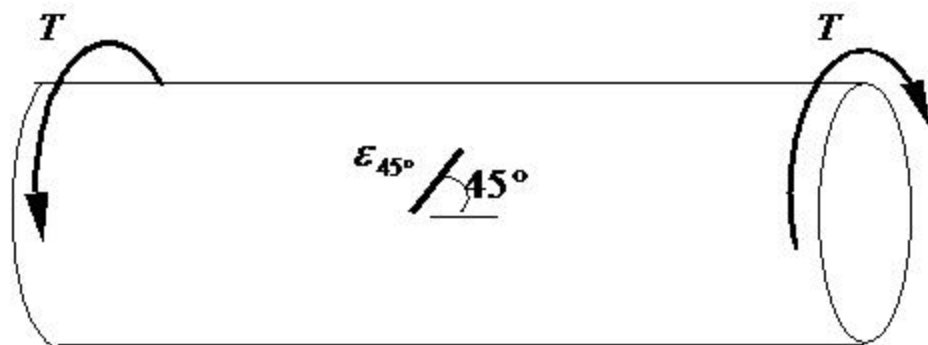
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

01. 已知某危险点的应力状态如图， $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试校核强度（用第三强度理论）



02. 受扭圆轴表面上任一点处与轴线成 45° 方向的线应变 $\varepsilon_{45^\circ} = 260 \times 10^{-6}$ ，材料的 $E=200\text{Gpa}$ $\nu = 0.3$ ， $[\sigma] = 160\text{Mpa}$ ，用第三强度理论校核其强度。（12分）



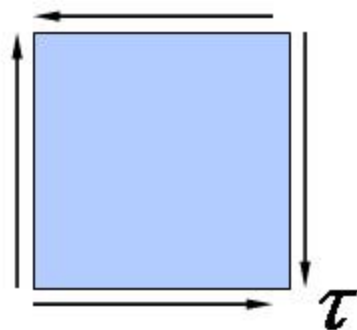
03. 图示应力状态，按第三强度理论校核，强度条件为 _____

A (A) $\tau \leq [\sigma]$

B (B) $\sqrt{2}\tau \leq [\sigma]$

C (C) $\sqrt{3}\tau \leq [\sigma]$

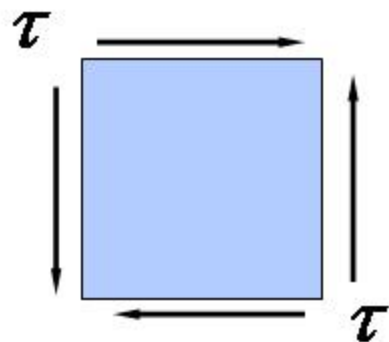
D (D) $2\tau \leq [\sigma]$



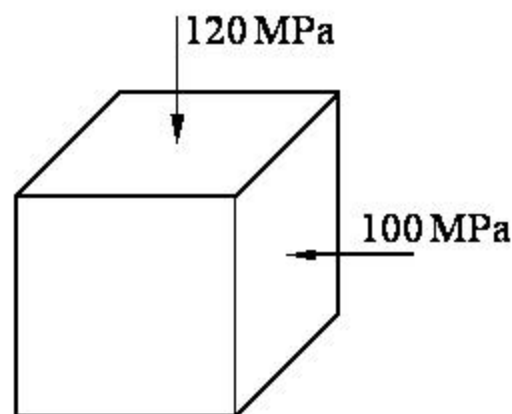
判断

重选

04. 纯剪切应力状态的单元体如图，则其第三强度理论相当应力为 2τ



05. 图示单元体, 第三强度理论的相当应力 $\sigma_{r3} =$ 120 MPa。

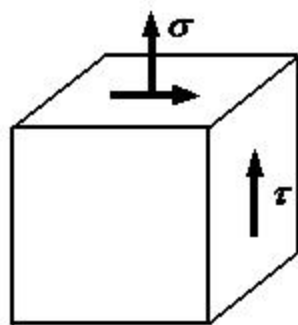


06. 危险点接近于三向均匀受拉的塑性材料, 应选用
最大拉应力 强度理论进行计算, 因为此时材料的破坏形式
为 断裂。

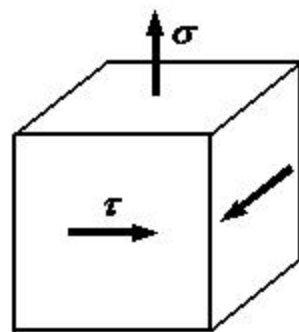
07. 两种应力状态如图所示，试按第四强度准则比较两者的危险程度。(思考三分钟)

对图(a)

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_2 = 0$$



(a)



(b)

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

对图(b)

$$\sigma_1 = \sigma \quad \sigma_2 = \tau \quad \sigma_3 = -\tau$$

(假设 $\sigma \geq \tau$, $\sigma \leq \tau$ 同理)

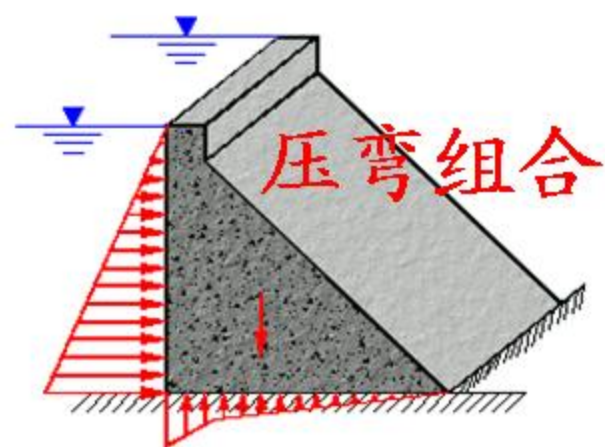
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

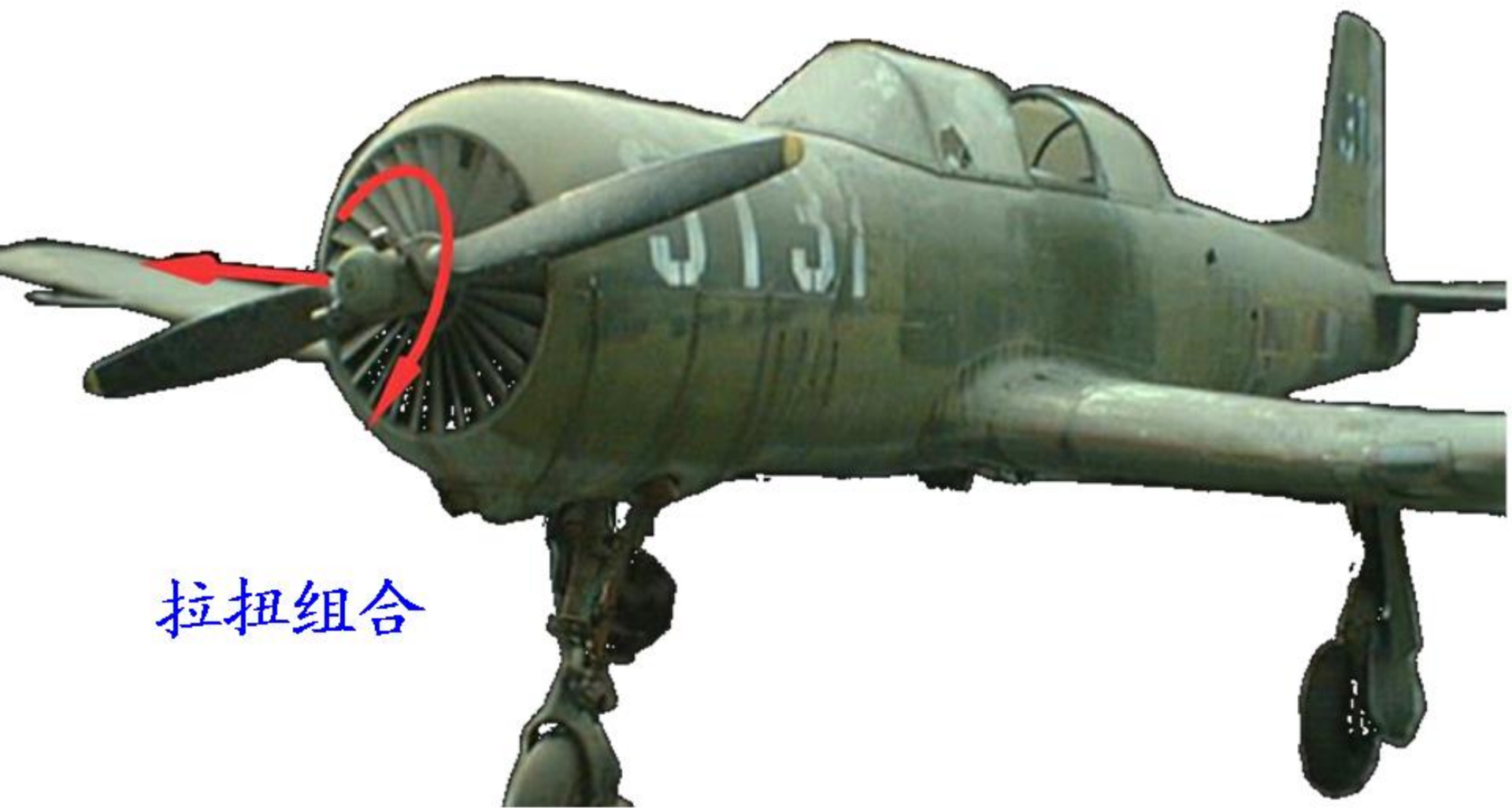
由于两者的相当应力相同，故两者的危险程度相同。

§ 14.4 弯扭组合与弯拉（压）扭组合

在外力作用下，构件若同时产生两种或两种以上基本变形的情况，称为组合变形。

请看实例





拉扭組合

组合变形问题的基本解法是**叠加法**

条件是：（1）小变形假设。

（2）载荷和位移成线性关系：比例极限内。

其基本步骤是：

（1）将载荷分解，得到与原载荷等效的几组简单载荷，使构件在每组简单载荷作用下只产生一种基本变形。

（2）分别计算构件在每种基本变形情况下的应力。

（3）将每种基本变形情况下的应力叠加，然后进行强度计算。当构件危险点处于简单应力状态时，可将上述应力进行代数相加；若处于复杂应力状态，则需要按照强度理论来进行强度计算。

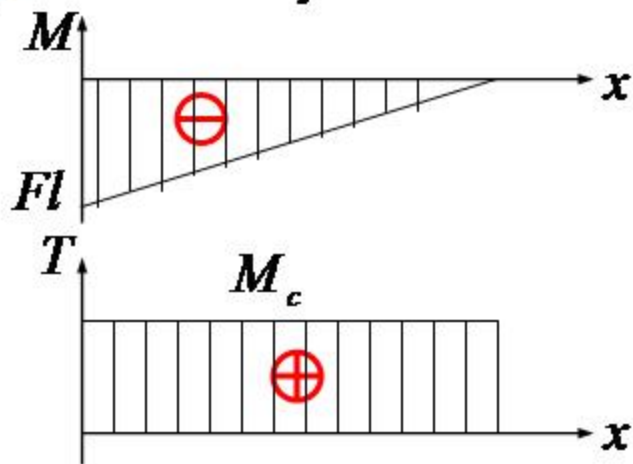
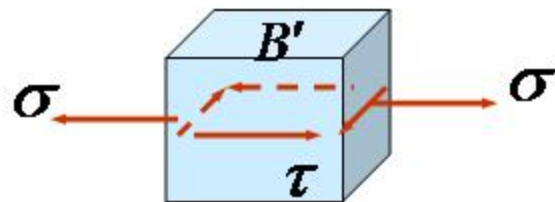
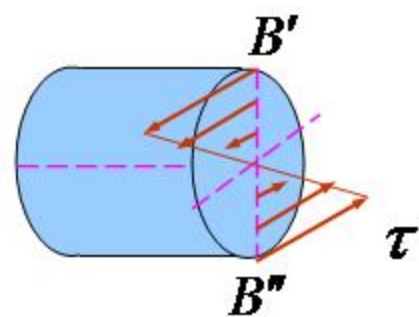
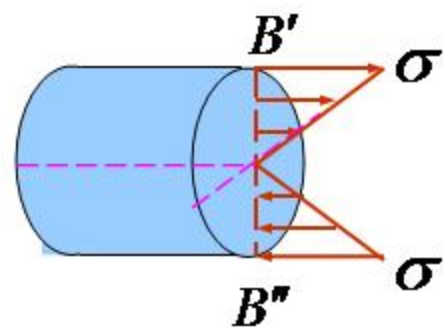
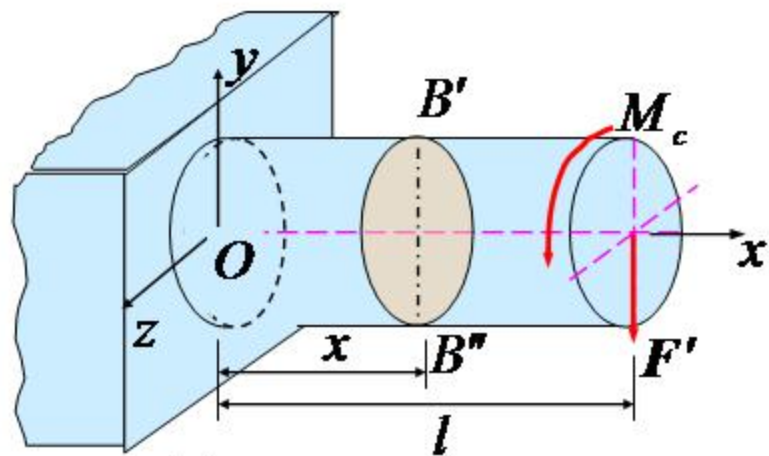
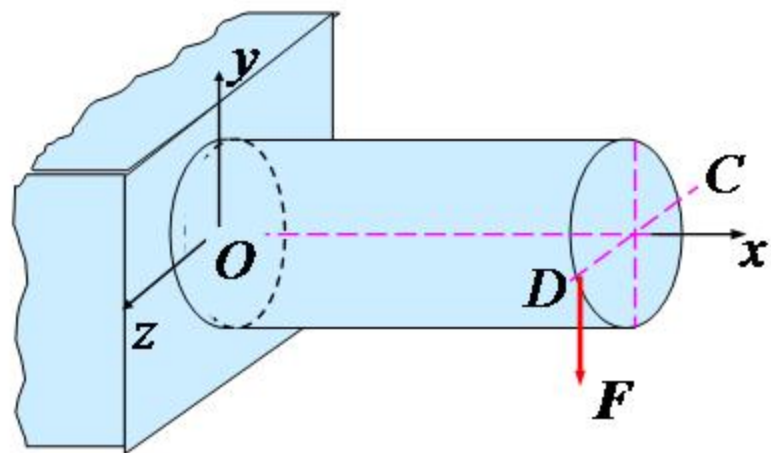
本节只讨论**扭转与弯曲的组合**及**拉伸(压缩)、扭转与弯曲**的组合

一、弯扭组合的强度计算

剪力 $F_s = F$ 可以忽略不计

弯矩 $M = -F(l-x)$

扭矩 $T = M_c = \frac{Fd}{2}$

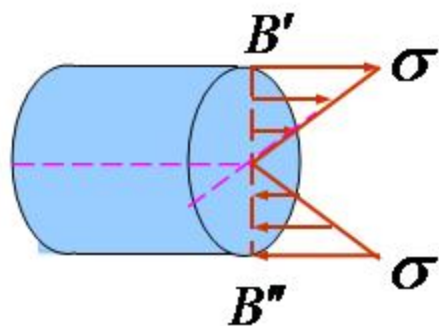


$$\sigma = \frac{M}{W_z}$$

$$\tau = \frac{T}{W_p}$$

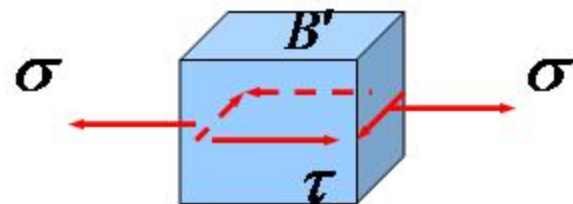
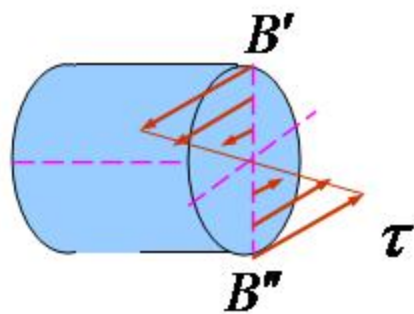
$$\sigma_x = \sigma$$

$$\sigma_y = 0$$

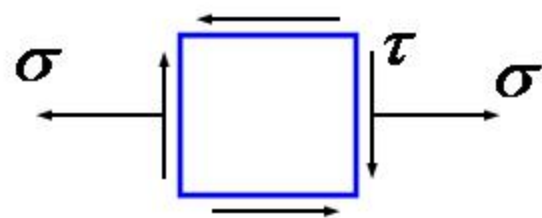


所以:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$



$$\sigma_2 = 0$$



由第三强度理论: $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$


$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$



$$\frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

由第四强度理论:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$


$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$

$$\sigma_2 = 0$$

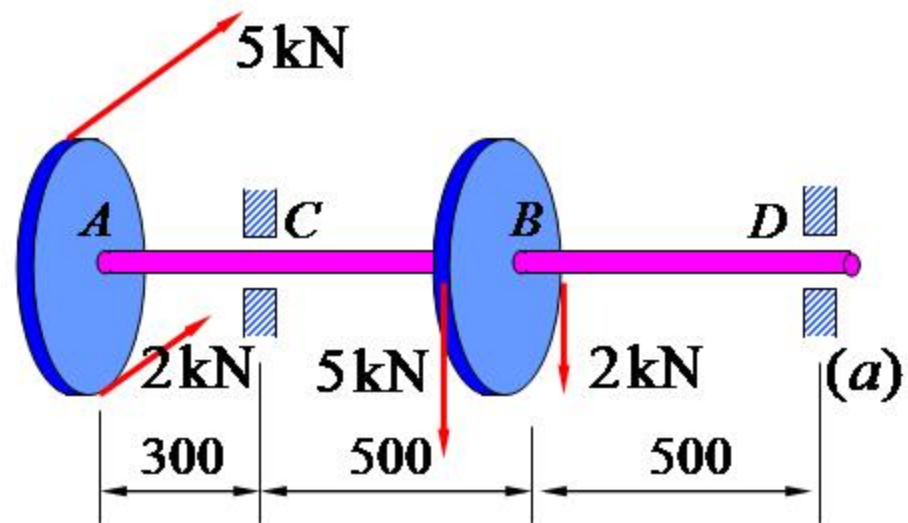
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$



$$\frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

例

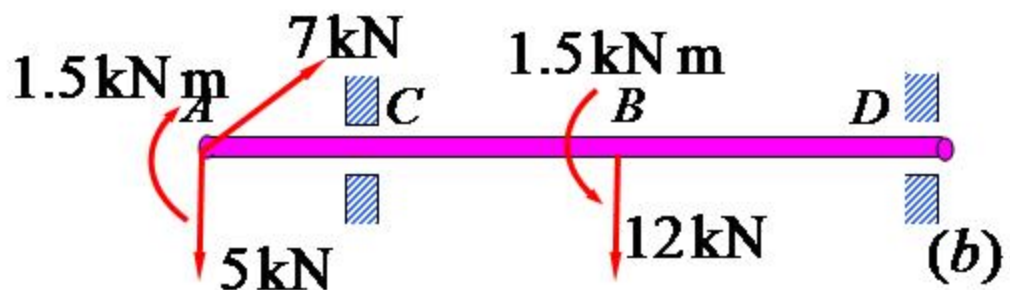
如图所示一圆轴，装有皮带轮A和B。两轮有相同的直径 $D=1\text{m}$ 和相同的重量 $P=5\text{kN}$ 。两轮上的拉力大小和方向如图。设许用应力 $[\sigma]=80\text{MPa}$ ，试按第三强度理论来求所需圆轴直径。



解:

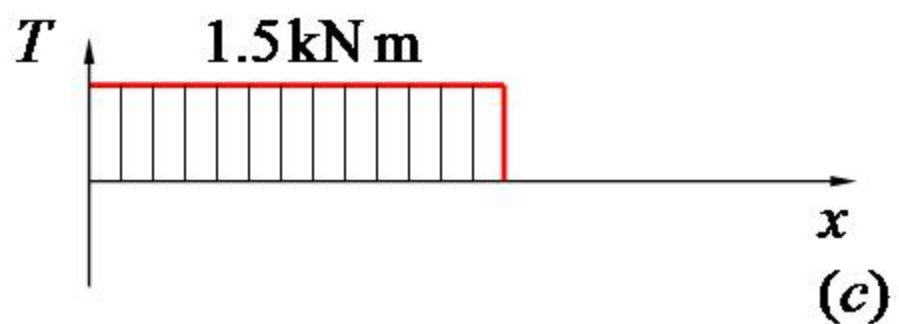
(1) 分析载荷

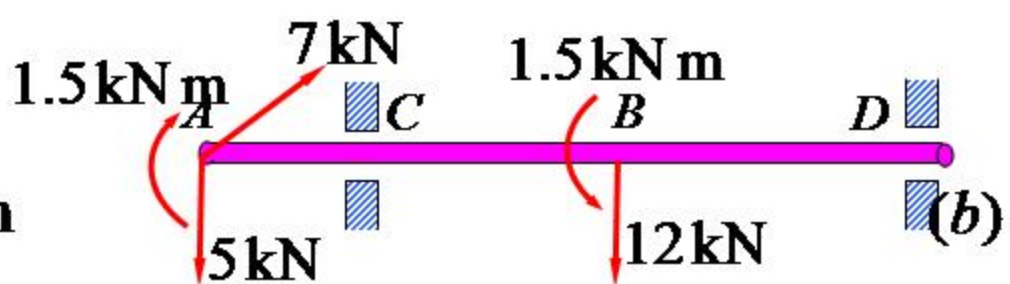
如图b所示



(2) 作内力图

如图c、d、e、f所示





$$M_C = \sqrt{(1.5)^2 + (2.1)^2} = 2.58 \text{ kNm}$$

$$M_D = \sqrt{(2.25)^2 + (1.05)^2} = 2.48 \text{ kNm}$$

按第三强度理论

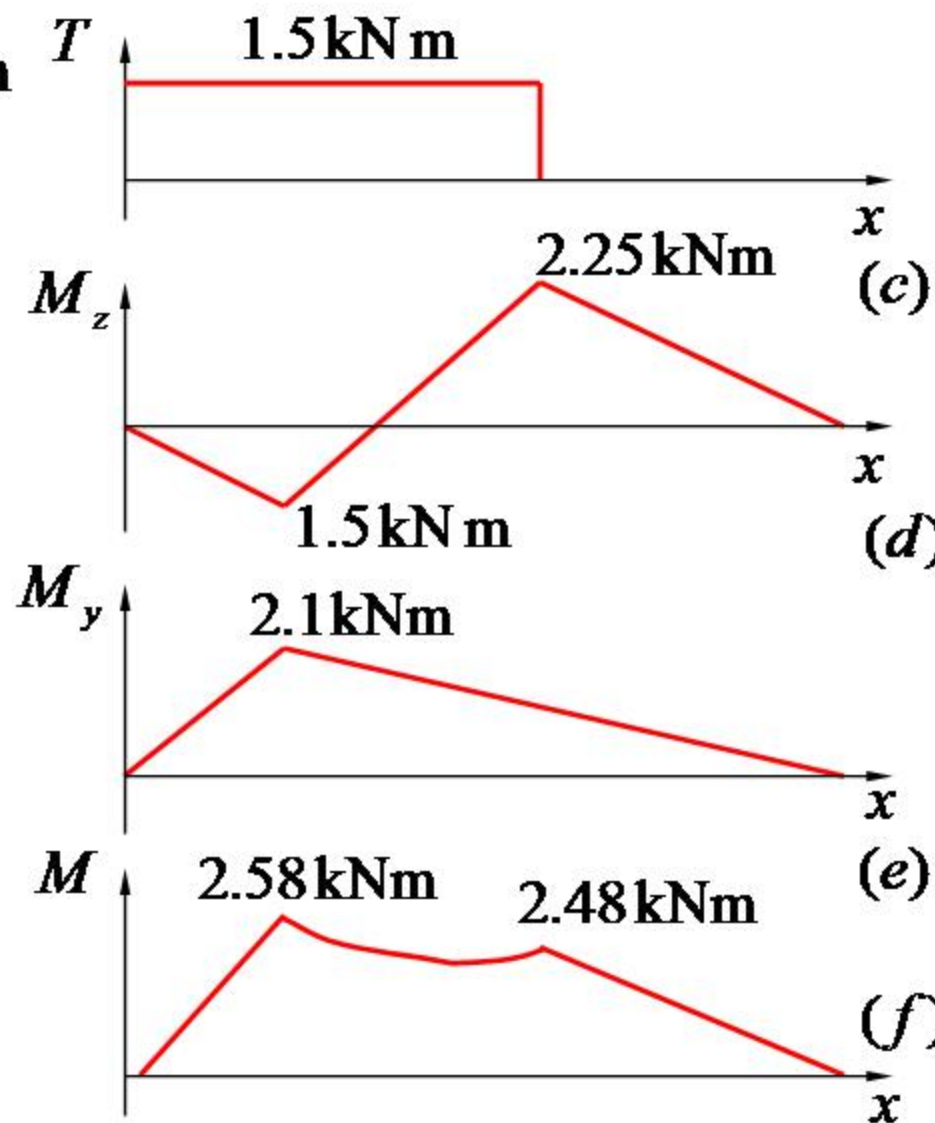
$$\frac{\sqrt{(2580)^2 + (1500)^2}}{W} \leq 80 \times 10^6$$

得:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq 37.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

因此, 得:

$$d = 72 \text{ mm}$$



图示水平直角折杆受铅直力 F 作用。圆轴 AB 的直径 $d=100\text{ mm}$ ， $a=400\text{ mm}$ ， $\nu=0.25$ ， $E=200\text{ GPa}$ 。在截面 D 顶点 K 处，测得轴向线应变 $\varepsilon_0=2.75\times 10^{-4}$ 。试求该折杆危险点的相当应力 σ_{r3} 。

(2005~2006学年第2学期期末考试题)

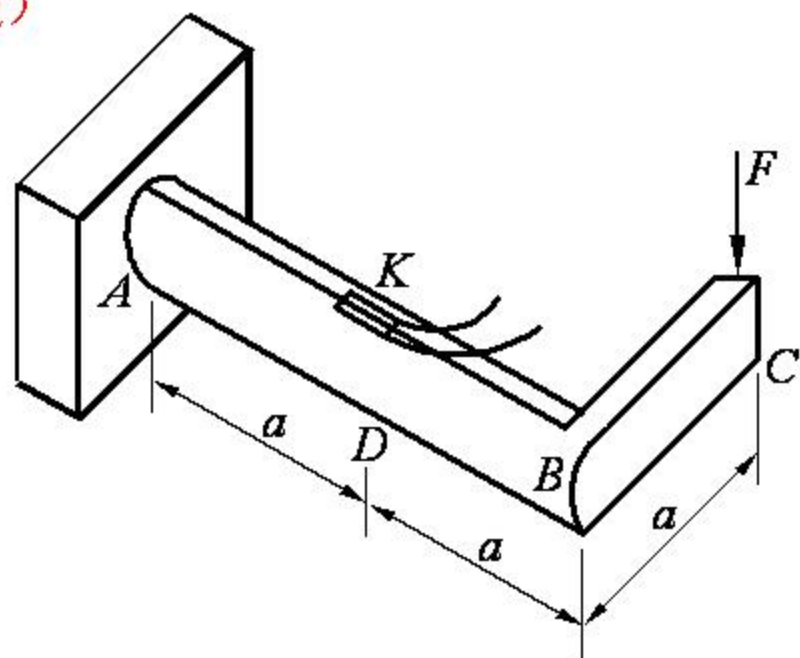
解：点 K ， $\sigma = E\varepsilon_0 = 55\text{ MPa}$

$$\text{又 } \sigma = \frac{M_D}{W} = \frac{Fa}{\pi d^3 / 32}$$

$$\text{则 } F = 13.5\text{ kN}$$

危险截面在固定端处

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32\sqrt{(2Fa)^2 + (Fa)^2}}{\pi d^3} = 123\text{ MPa}$$



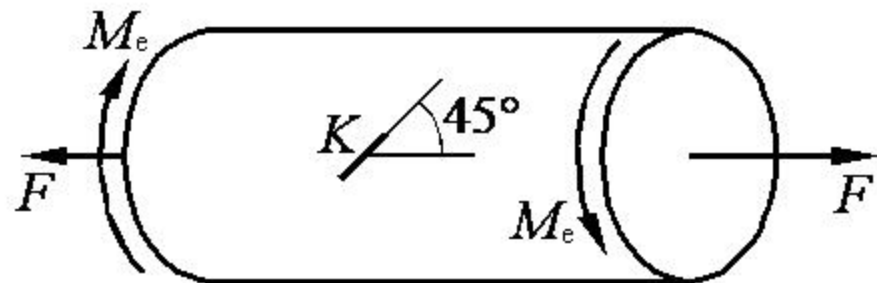
图示圆杆的直径 $d = 200 \text{ mm}$ ，两端承受力与力偶， $F = 200\pi \text{ kN}$

$E = 200 \times 10^3 \text{ MPa}$ ， $\nu = 0.3$ ， $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ 。在杆表面点 K 处，

测得线应变 $\varepsilon_{45^\circ} = 3 \times 10^{-4}$ 。试用第四强度理论校核杆的强度。

解：杆表面点 K 处 $\sigma_x = \frac{4F}{\pi d^2} = 20 \text{ MPa}$

利用斜截面的应力公式与广义胡克定律得：



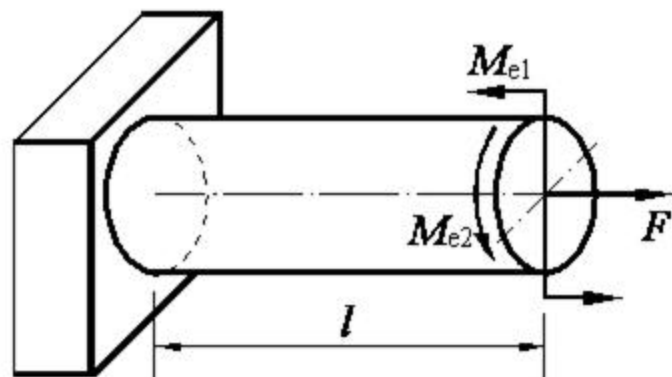
$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 90^\circ - \tau_{xy} \sin 90^\circ = \frac{\sigma_x}{2} - \tau_{xy}$$

$$\sigma_{135^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 270^\circ - \tau_{xy} \sin 270^\circ = \frac{\sigma_x}{2} + \tau_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \frac{(1-\nu)\sigma_x/2 - E\varepsilon_{45^\circ}}{1+\nu} \quad \text{则：} \quad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 91.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

满足强度条件。

图示圆截面钢杆的直径 $d = 20 \text{ mm}$ ，承受轴向力 F ，力偶 $M_{e1} = 80 \text{ N}\cdot\text{m}$ ， $M_{e2} = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$ ， $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ 。试用第四强度理论确定许用力 $[F]$ 。



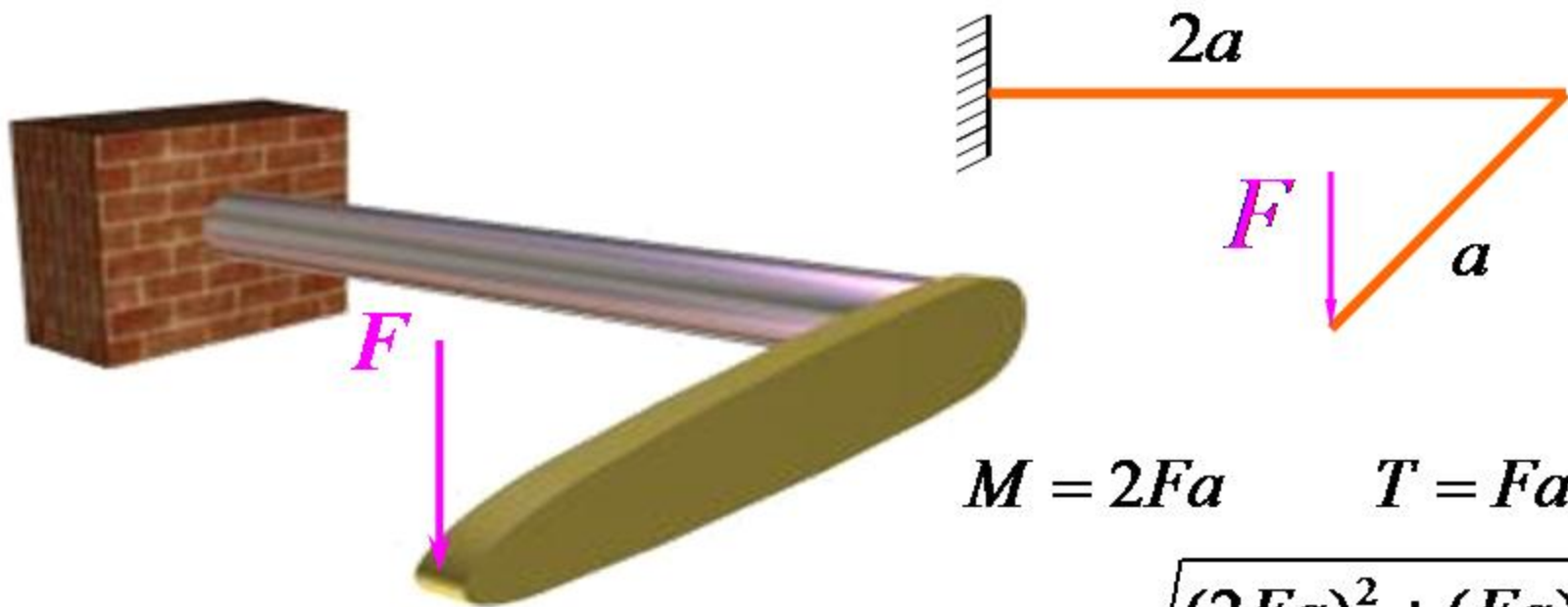
解：横截面外圆周上的点。

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32M_{e1}}{\pi d^3}, \quad \tau = \frac{16M_{e2}}{\pi d^3}。$$

由 $\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$ ，得 $F = 8.6 \text{ kN}$ 。

思考题1

直径为20mm的圆截面水平直角折杆，受垂直力 $F=0.2\text{kN}$ ，已知 $[\sigma]=170\text{MPa}$ 。试用第三强度理论确定 a 的许可值。



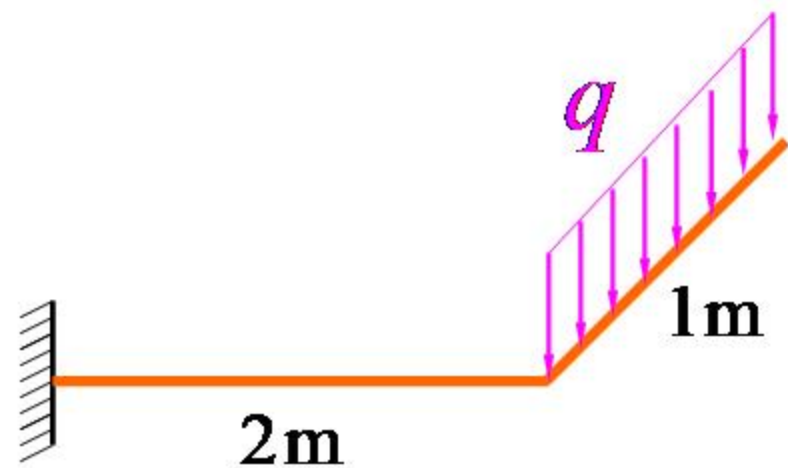
$$M = 2Fa \quad T = Fa$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{(2Fa)^2 + (Fa)^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma]$$

$$a \leq [\sigma] \frac{\pi d^3}{32\sqrt{5}F} = 299\text{mm}$$

思考题2

圆截面水平直角折杆，直径 $d=60\text{mm}$ ，垂直分布载荷 $q=0.8\text{kN/m}$ ； $[\sigma]=80\text{MPa}$ 。试用第三强度理论校核其强度。

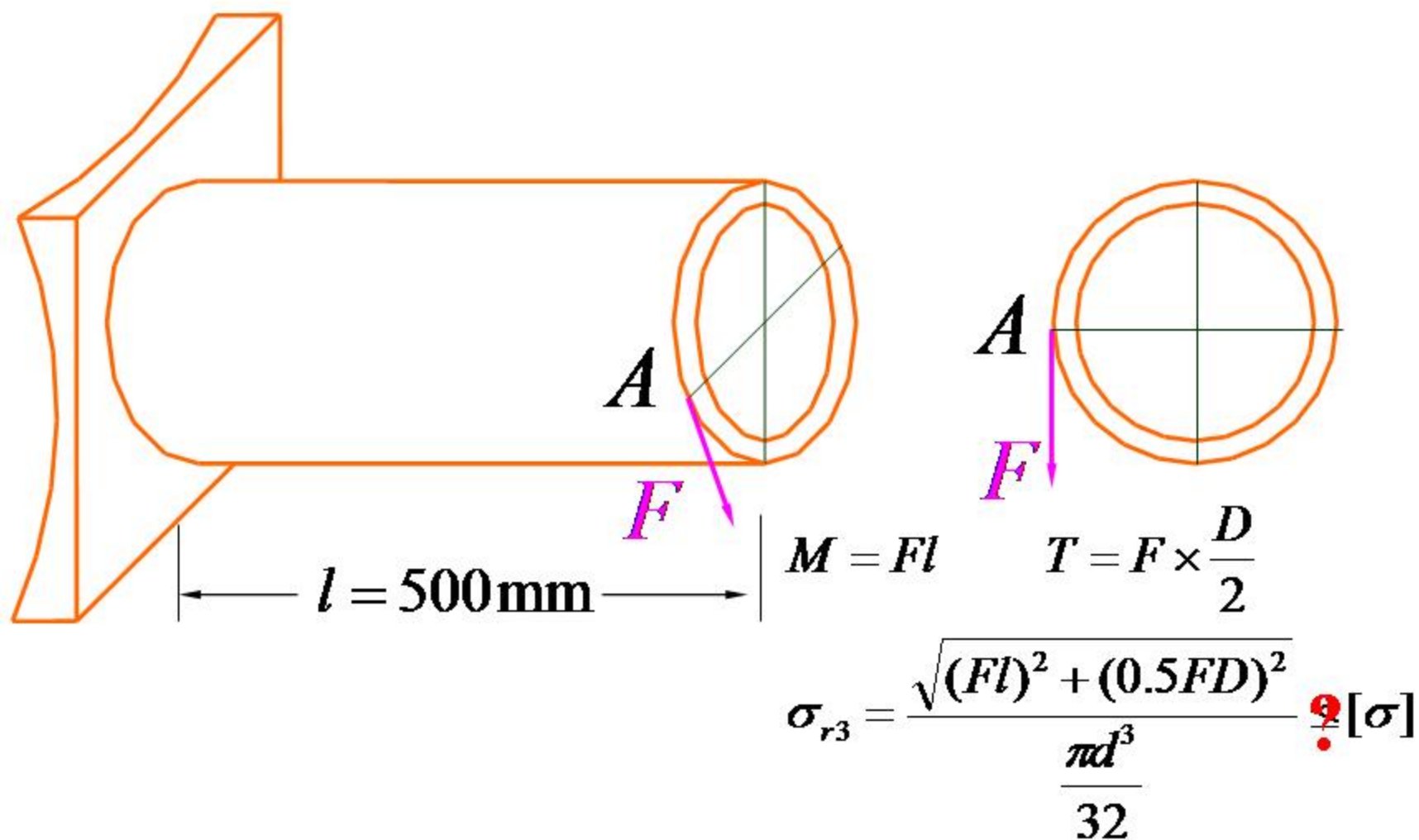


$$M = q \times 1 \times 2 \quad T = \frac{1}{2} \times q \times 1^2$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{(2q)^2 + (0.5q)^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma]$$

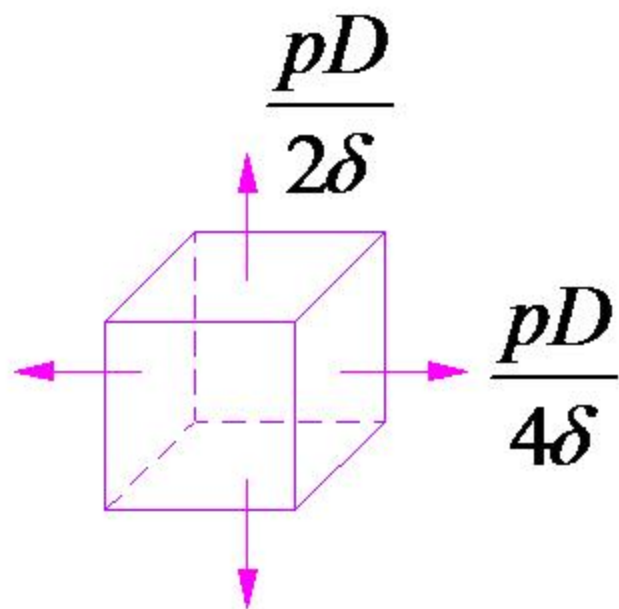
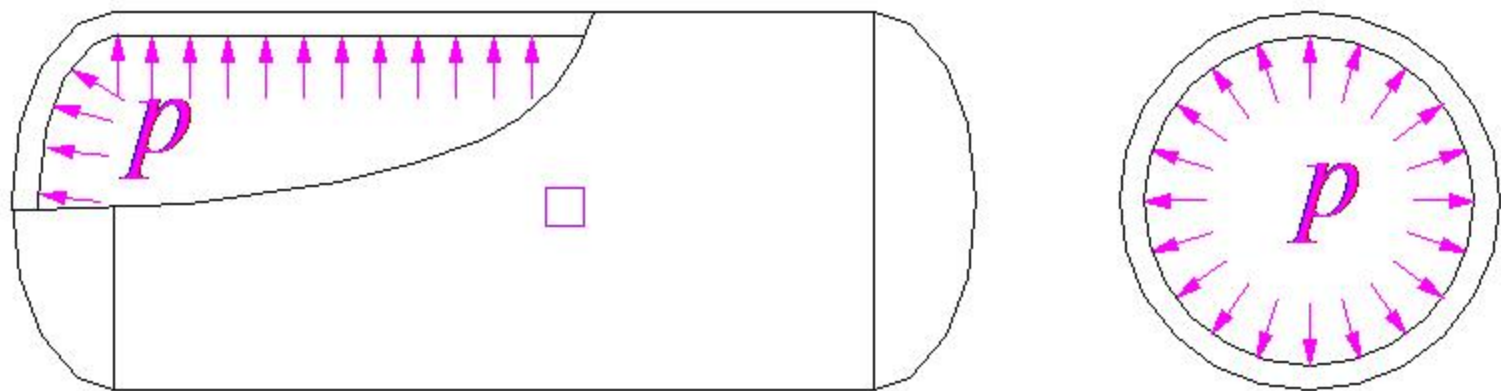
思考题3

空心圆轴的外径 $D=200\text{mm}$ ，内径 $d=160\text{mm}$ 。在端部有集中力 $F=60\text{kN}$ ，作用点为切于圆周的A点。 $[\sigma]=80\text{MPa}$ ，试用第三强度理论校核轴的强度。



§ 14.5 承压薄壁圆筒的强度计算

圆筒形薄壁压力容器，内径为 D 、壁厚为 δ ，承受内力 p 作用

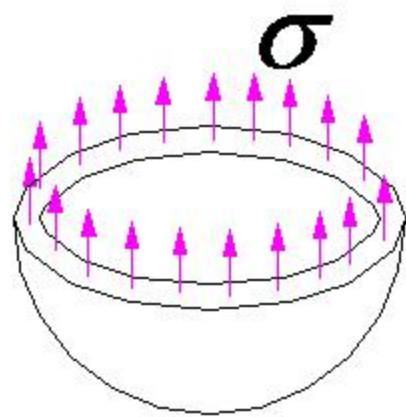
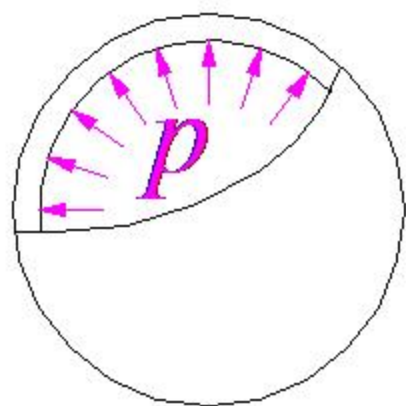


$$\sigma_1 = \frac{pD}{2\delta}$$

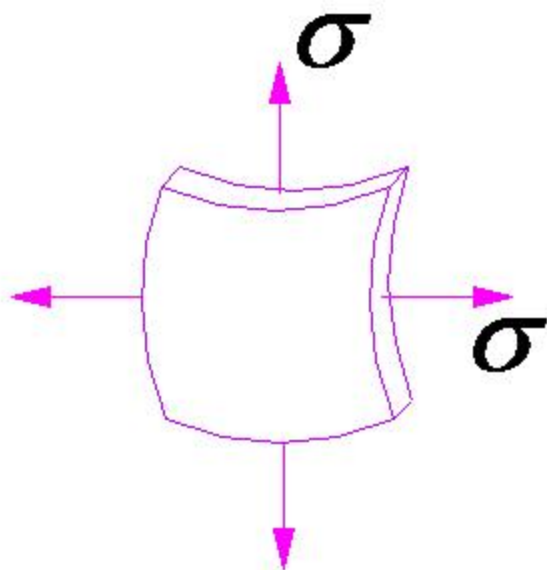
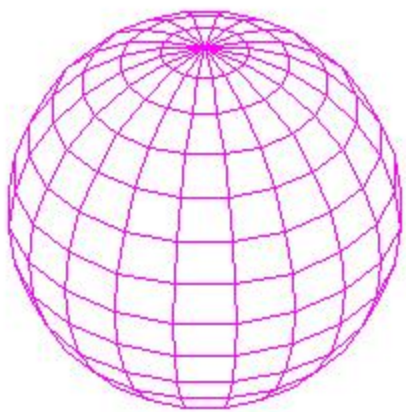
$$\sigma_2 = \frac{pD}{4\delta}$$

$$\sigma_3 = 0$$

圆球形薄壁容器，壁厚为 δ ，内径为 D ，承受内压 p 作用。



$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{p \times \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D \delta} = \frac{pD}{4\delta}$$



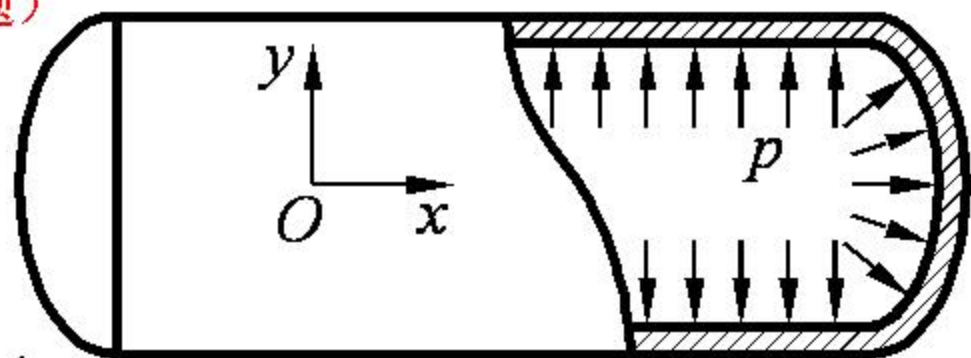
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pD}{4\delta}$$
$$\sigma_3 = 0$$

钢制封闭圆筒，在最大内压作用下测得圆筒表面任一点的
 $\varepsilon_x = 1.6 \times 10^{-4}$ 。已知 $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.28$, $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$,
 试按第三强度理论校核圆筒的强度。

(2003~2004学年第2学期期末考试题)

解:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ &= \frac{1}{E}\left(\frac{pD}{4\delta} - \frac{pD}{2\delta}\nu\right) = 1.6 \times 10^{-4}\end{aligned}$$



$$p = \frac{4\delta E}{D(1-2\nu)} \times 1.6 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= \frac{pD}{2\delta} = \frac{2E}{(1-2\nu)} \times 1.6 \times 10^{-4} = \frac{2 \times 200 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-4}}{1 - 2 \times 0.28} \\ &= 145.45 \text{ MPa} < [\sigma]\end{aligned}$$

故安全

解法二

解: $\sigma_y = 2\sigma_x$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = 1.6 \times 10^{-4}$$

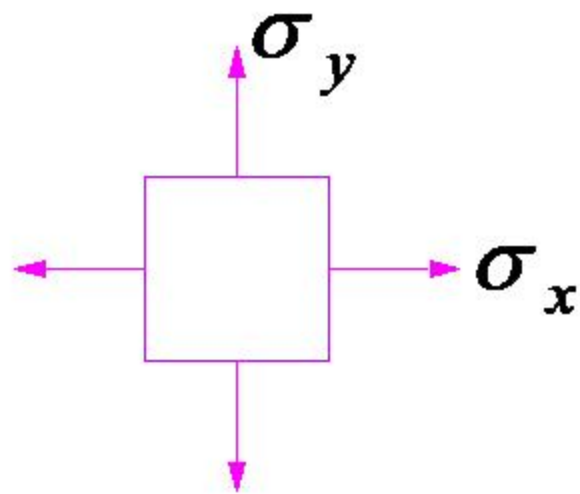
由上两式可求得 $\sigma_x = 72.73\text{MPa}, \sigma_y = 145.45\text{MPa}$

故

$$\sigma_1 = 145.45\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 72.73\text{MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

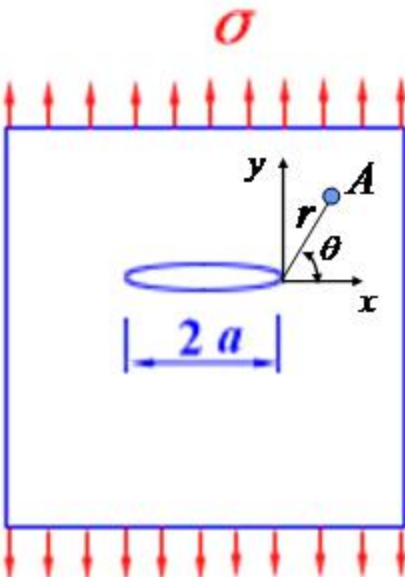
$$\sigma_{R3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 145.45\text{MPa} < [\sigma]$$

故: 满足强度条件。



§ 14.6 含裂纹构件断裂失效概念

1. 应力强度因子：是表征裂纹尖端附近区应力强弱程度的力学量。


$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{cases} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$
$$K_I (\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{3}{2}}) = \sigma \sqrt{\pi a}$$

2. 材料的断裂韧性：抵抗裂纹扩展的能力。

K_{IC} ：材料的固有性能。

3. 失稳扩展的强度条件： $K_I \leq K_{IC}$ ， $\sigma \sqrt{\pi a} \leq K_{IC}$

“豆腐渣”工程触目惊心

- 1999年1月4日，长200米的重庆綦江彩虹桥垮塌，死36人，多人受伤失踪
- 1998年8月7日，号称“固若金汤”的九江长江大堤发生决堤，事后调查，大堤里面根本没有钢筋。朱总理怒斥为“王八蛋”工程
- 1996年初，投资43亿、我国铁路建设史上规模最大的北京西客站投入使用后，几乎所有的站台都经过封闭式返修。天篷玻璃、办公大厅和行包房更是大小毛病不断
- 1996年11月底，总投资3200万元的210国道改道工程完工，仅过了两个月，还未交付使用的西延公路就沿山段就变成翻浆路，路面凸凹不平、柏油不知去向

“豆腐渣”工程触目惊心

- 1996年8月初，耗资2000万元的南京长江大桥路面修补完工，专家称10年内无需大修。只过了2年，此桥又进行了全面维修
- 1998年10月，沈哈高速公路清阳河大桥出现坍塌，造成2人死亡、5人重伤
- 1997年3月25日，福建莆田江口镇新光电子有限公司一栋职工宿舍楼倒塌，死亡35人、重伤上百人

“豆腐渣”工程触目惊心

- 1997年7月12日，浙江常山县城南开发区一幢5层住宅楼突然发生中部坍塌，整栋楼内39人中仅3人幸存
- 1994年，青海沟后水库大坝垮塌，淹死下游居民近300人，失踪几十人
- 1995年12月，四川德阳旌湖开发区一栋7层综合楼倒塌，造成17人死亡



中国矿业大学

China University of Mining & Technology

第十四章 复杂应力状态强度问题

2009~2010 Copyright © 钟卫平 All Rights Reserved

本章作业:

14-2、14-5、14-6、14-9、14-11、14-18

Thank you for listening!