中国矿业大学 China University of Mining & Technology 多媒体课堂教学课件

工程力学

Engineering Mechanics

主讲教师：钟卫平

制作与设计 钟卫平

第三章　力偶系

Chapter 3　System of Couples

第三章 力偶系

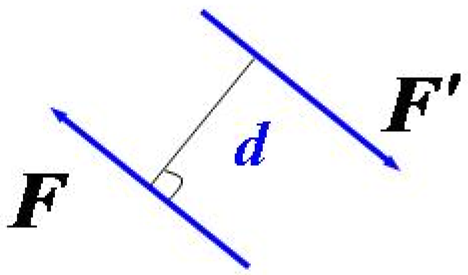
力偶： 大小相等、方向相反但不共线的两个平行力组成的力系。

表示为：(F, F')

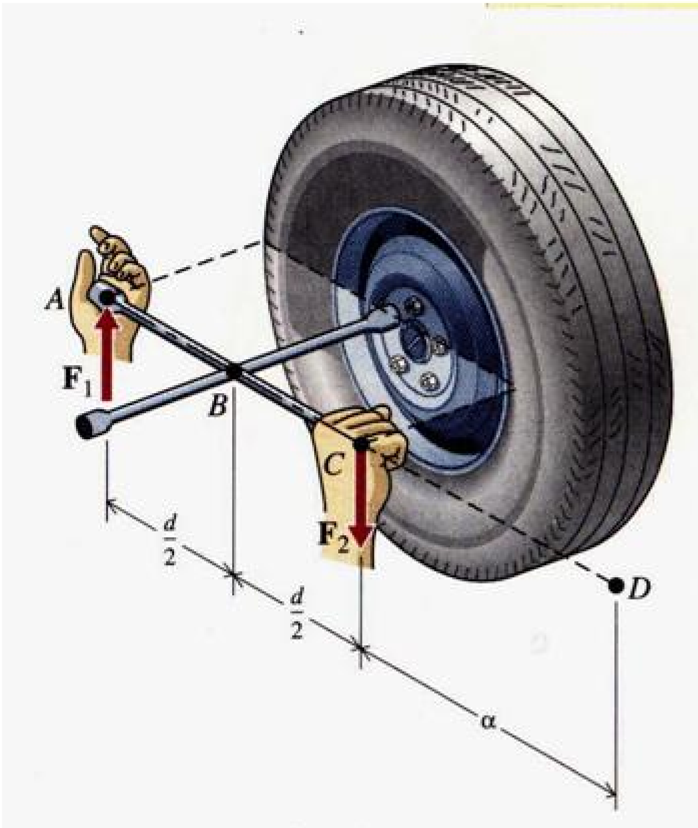
力偶中两力作用线之间的垂直距离d称为**力偶臂**；

力偶所在的平面称为**力偶作用面**。

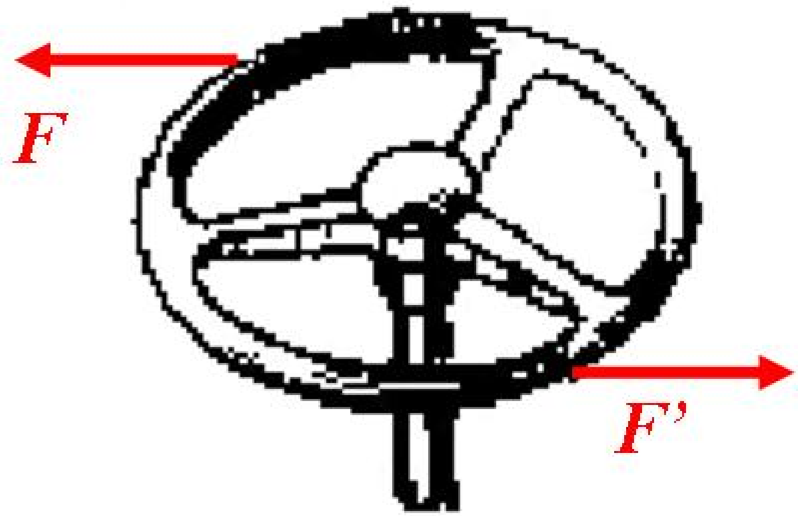
作用在刚体中的一群力偶，称为**力偶系**。



请看力偶的实例



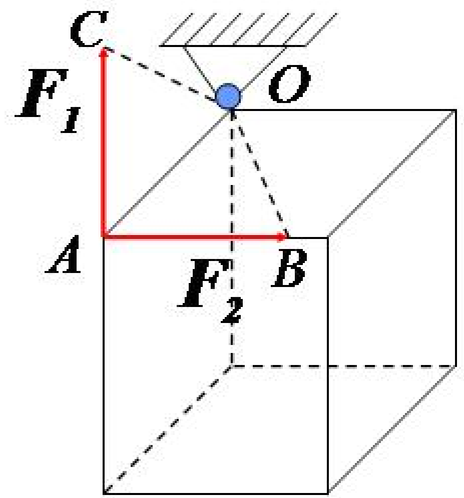
拧镙丝



方向盘

§3.1 力对点之矩矢

1. 力对点之矩矢的概念



在平面问题中，力对点之矩取决于两个要素：

（1）力的大小与力臂的乘积 $F \cdot h$；

（2）力使物体绕O点转动的方向。

力对点之矩矢取决于三个要素：

（1）力的大小与力臂的乘积 $F \cdot h$，即力矩的大小。

（2）在力矩作用面内，力使物体绕O点转动的方向，即力矩的转向

（3）力矩的作用面，也就是确定转轴的方位。

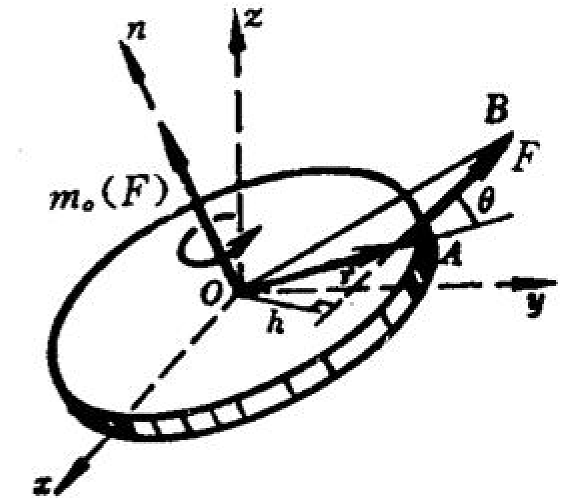
这三个要素可以用一个矢量来表示：矢量的模表示力与力臂的乘积 $F \cdot h$，矢量的方位表示转轴的方位，矢量的指向按右手规则确定，表示刚体绕转轴的转向，这个矢量称为力对点之矩矢。

表示为：$\boldsymbol{M_o(F)}$或 $\overline{M}_o(\overline{F})$

它是一定位矢量,是力使刚体绕某点转动效应的度量

2. 力对点之矩矢的矢量积表示式和解析表示式

（1）力对点之矩矢的矢量积表示式



由右图易见：

$$h = r\sin\theta$$

于是：

$$\left|M_o(F)\right| = Fr\sin\theta$$

式中：r表示力的作用点A的矢径，

θ为矢径r与力F的夹角。

此外，力矩矢量的方向与矢积 $r \times F$ 的方向一致，因此力矩矢量可以写成：

$$M_O(F) = r \times F$$

注意 在平面力系中，各力与矩心O在同一平面内，各力矩矢量共线，只需用正负号即可确定力矩的转向。

（2）力对点之矩矢的解析表示式

将力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影，得 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$，力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点A的坐标为 x y 。z坐标轴的三个单位矢量为 ，$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{j}$ 。$\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

力 $\boldsymbol{F}$对O点之矩矢为

$$\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\times(F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$=(yF_z-zF_y)\boldsymbol{i}+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{j}+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{k}$$

这就是力对点之矩矢的解析表示式

因此，得力对点之矩矢在坐标轴上的投影表示式为：

$$
\begin{cases}
\left[\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F})\right]_x = yF_z - zF_y \\
\left[\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F})\right]_y = zF_x - xF_z \\
\left[\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F})\right]_z = xF_y - yF_x
\end{cases}
$$

3. 力对点之矩矢的基本性质

力对点之矩矢服从矢量合成法则

对于作用于刚体上的两个力

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2)$$

对于作用于刚体上n个力组成的力系

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2) + \cdots + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_n) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

4. 合力矩定理

$$\vec{M}_O(\vec{F}_R) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}) \quad \text{——合力矩定理}$$

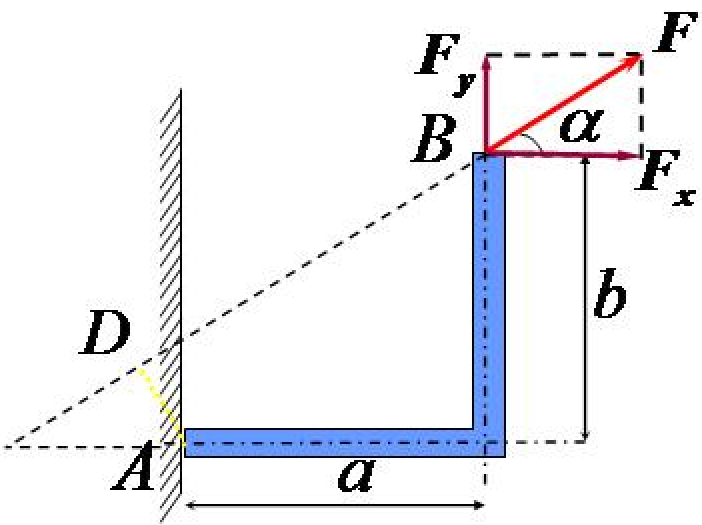
即：力系的合力对任一点之矩矢，等于诸分力对同一点之矩矢的矢量和。

对于各力的作用线在同一平面内的平面问题，此时力对点之矩为代数量。

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F)$$

即：平面力系的合力对平面上任一点之矩，等于诸分力对同一点之矩的代数和。

求 F 对A点之矩



$$AD = \left(b\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - a\right)\sin\alpha = b\cos\alpha - a\sin\alpha$$

$$M_O(F) = F(a\sin\alpha - b\cos\alpha)$$

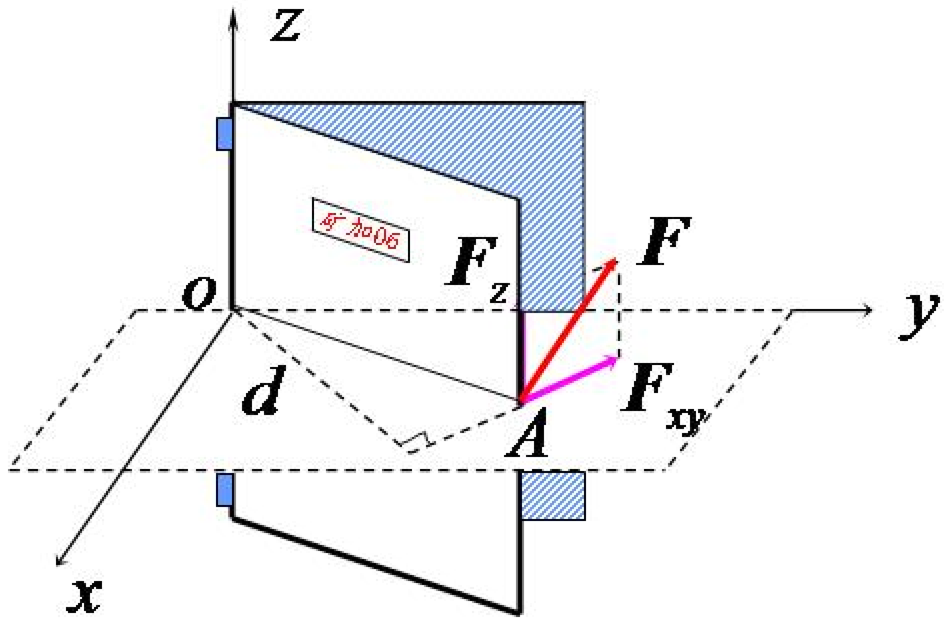
$$M_O(F) = M_O(F_x) + M_O(F_y)$$

$$= -F\cos\alpha \cdot b + F\sin\alpha \cdot a$$

$$= F(a\sin\alpha - b\cos\alpha)$$

§3.2 力对轴之矩

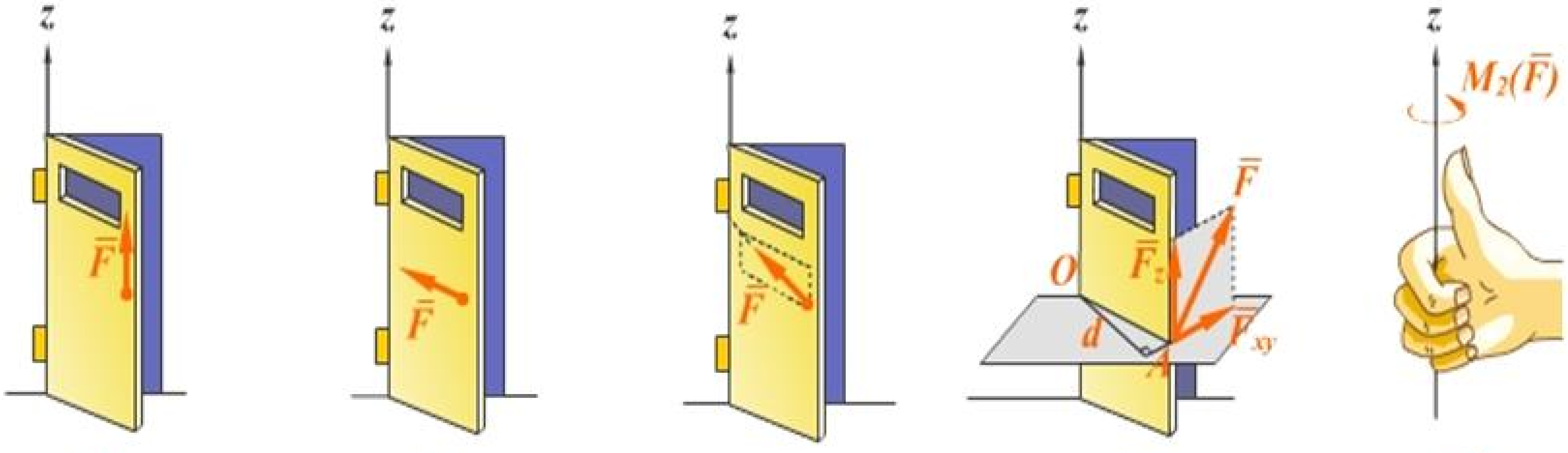
1. 力对轴之矩的概念



$$M_z(F) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot d$$

力对轴之矩是力对刚体所产生的绕该轴转效应的度量。是一代数量

符号规定：用右手螺旋规则，拇指与z轴正向一致为正，反之为负



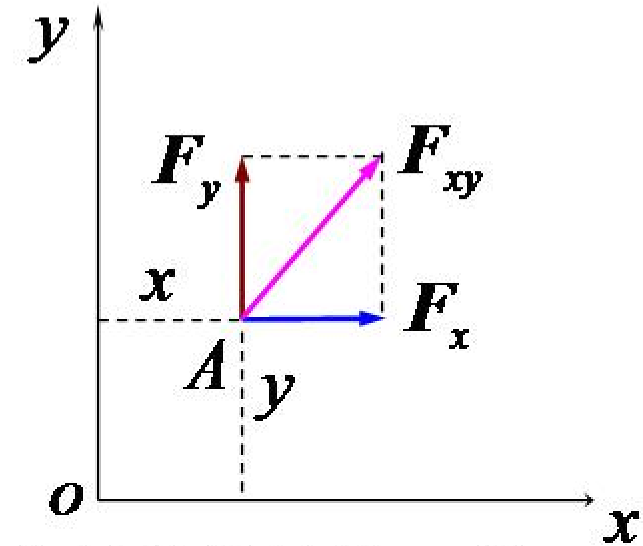
(a) (b) (c) (d) (e)

2. 力对坐标轴之矩

按力对轴之矩的定义

$$M_z(F) = M_O(F_{xy}) = M_O(F_x) + M_O(F_y)$$

$$= -yF_x + xF_y$$



同理 $$M_x(F) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(F) = zF_x - xF_z$$

3. 力对点之矩与力对坐标轴之矩的关系

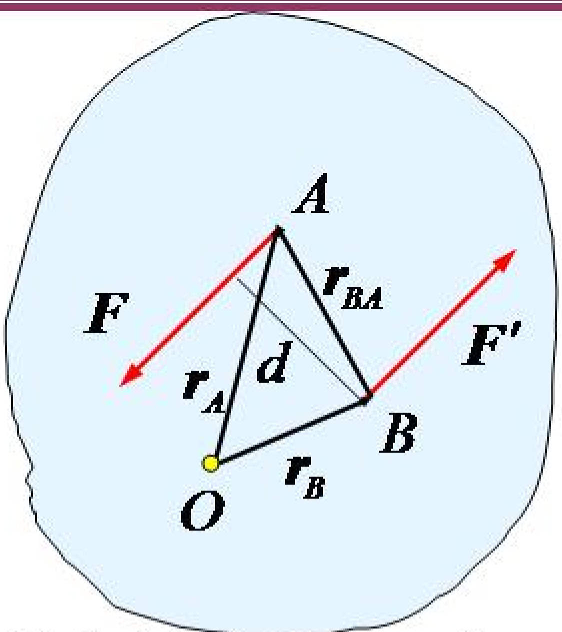
比较力对点之矩矢的投影式及力对坐标轴之矩的解析式，得:

$$\left\{\begin{aligned} [M_O(F)]_x &= M_x(F) \\ [M_O(F)]_y &= M_y(F) \\ [M_O(F)]_z &= M_z(F) \end{aligned}\right.$$

意思是：力对点之矩矢在通过该点之轴上的投影等于力对该轴之矩

§3.3　力偶矩矢

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}')$$
$$= \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}'$$
$$= \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}$$
$$= (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) \times \boldsymbol{F}$$
$$= \boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F}$$



$\boldsymbol{M}$称为力偶矩矢，它是力偶对刚体产生的绕任意一点O转动效应的度量.由于O的任意性，所以它与O的位置无关。因此，力偶矩矢是自由矢量。

$\boldsymbol{M}$ 的解析式形式：　$\boldsymbol{M} = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$

在平面力偶系中，力偶作用效应用代数量表示，即：

$$M = \pm F \cdot d$$

力偶使刚体在作用面内作逆时针转动，取“+”，反之，取“-”

§3.4　力偶的等效条件和性质

1. 力偶的等效条件

两个力偶的等效条件是它们的力偶矩矢相等，也就是说两个力偶矩矢相等的力偶等效。

2. 力偶的性质

性质一　　力偶不能与一个力等效，因此不能与一个力平衡。

证明:

$$F_R = F_{R1} + F_{R2}$$

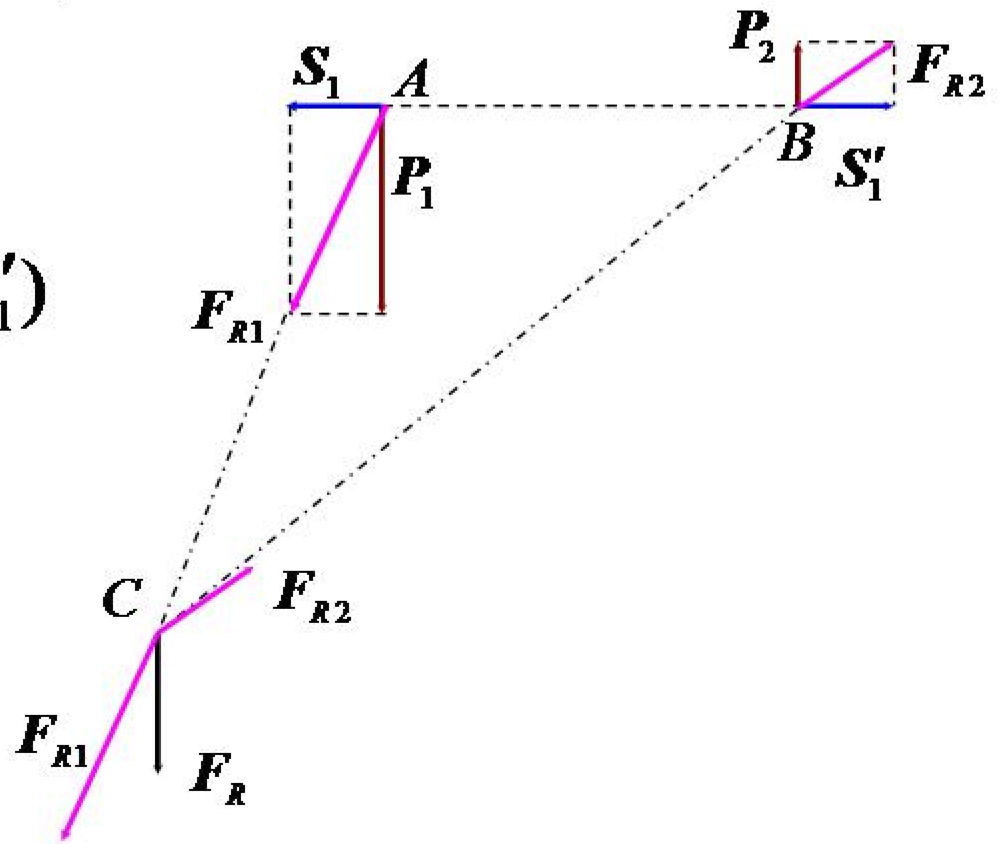
$$= (P_1 + S_1) + (P_2 + S_1')$$

$$= P_1 + P_2$$

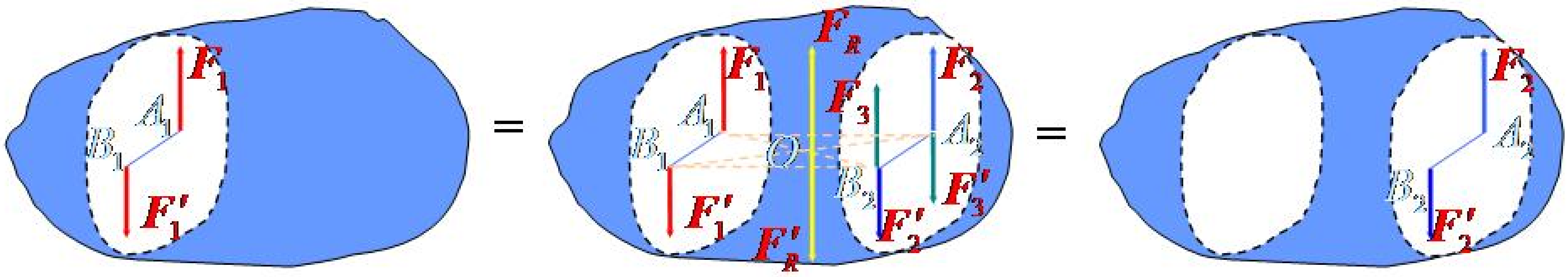
若:　$P_1 = -P_2$

那么它们组成一个力偶，此时

$$F_R = 0$$

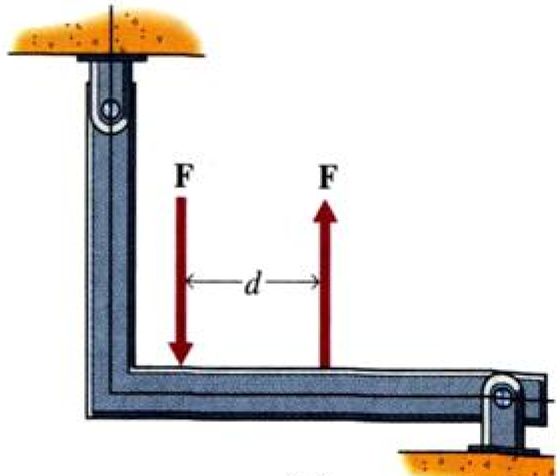


性质二　力偶可在其作用面内任意转移，或移到另一平行平面，而不改变对刚体的作用效应。

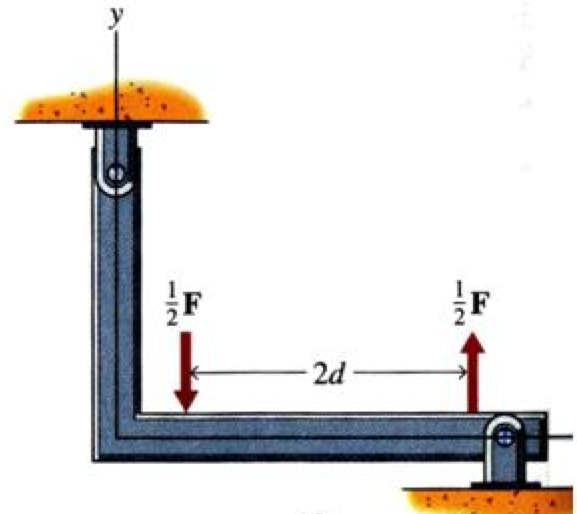


$$F_2' = -F_2 = F_3' = -F_3 = -F_1$$

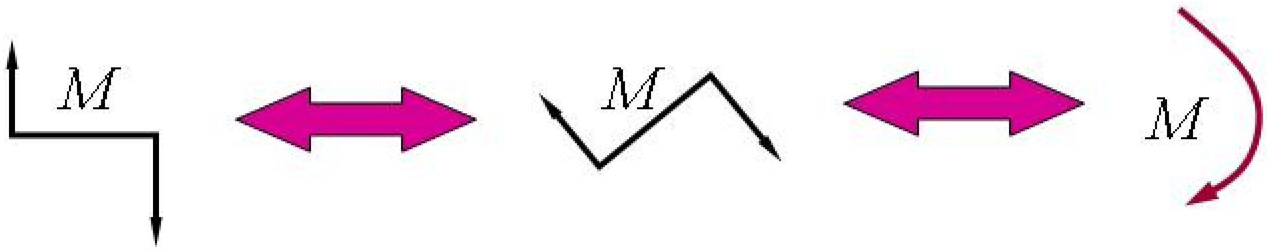
性质三　只要保持力偶矩的大小和力偶的转向不变，可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，而不改变力偶对刚体的作用。

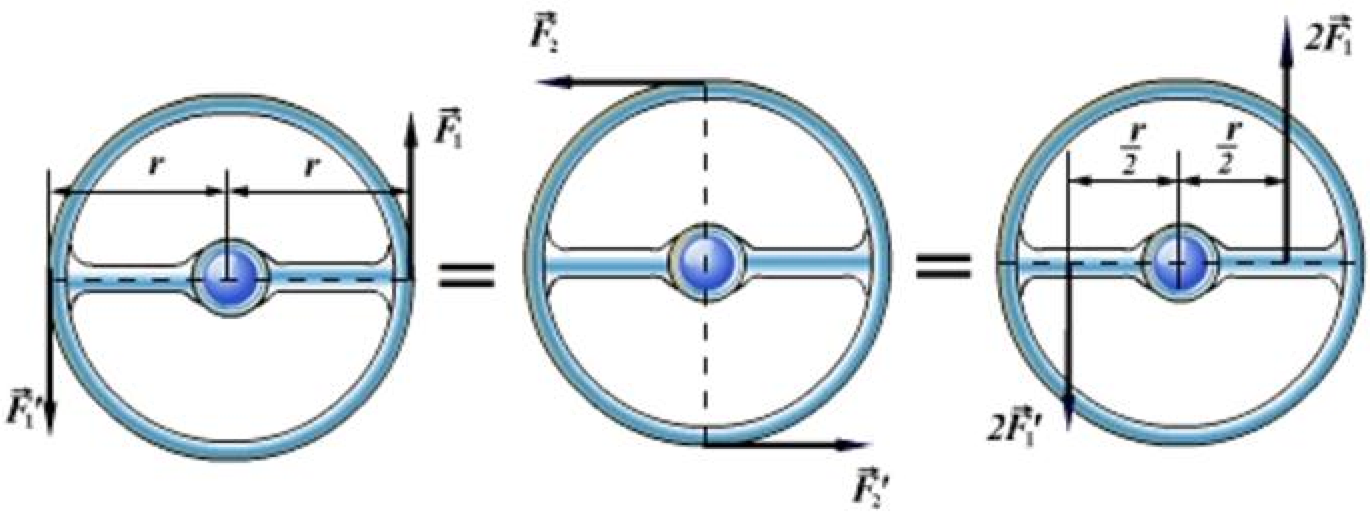

F
F
d

(a)

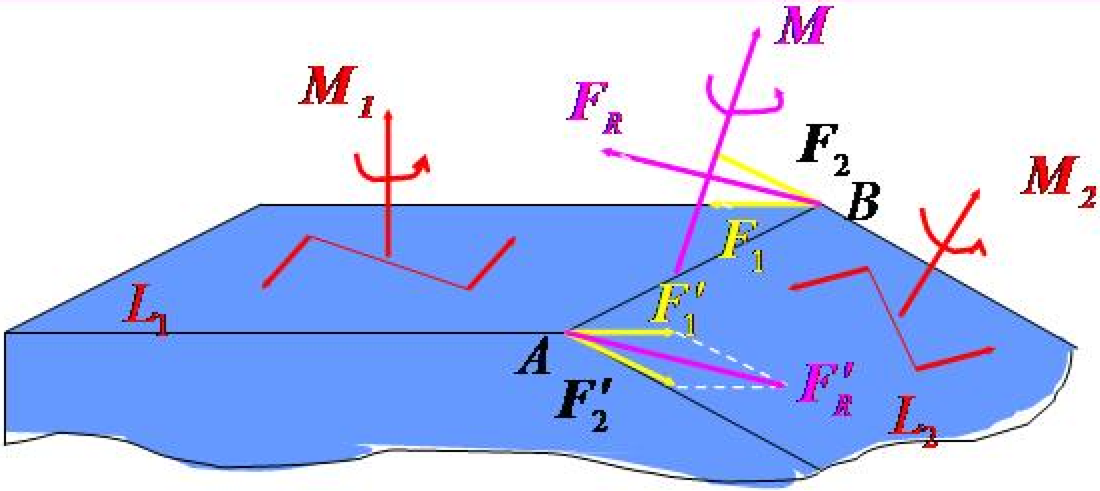

y
$\frac{1}{2}$F
$\frac{1}{2}$F
2d

(d)


M
M
M


$\vec{F}_1$
r
r
$\vec{F}_1'$
=
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_2'$
=
$2\vec{F}_1$
$\frac{r}{2}$
$\frac{r}{2}$
$2\vec{F}_1'$

§3.5　力偶系的合成



$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \qquad \boldsymbol{F}'_R = \boldsymbol{F}'_1 + \boldsymbol{F}'_2 \qquad \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}'_R$$

力偶　$(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{F}'_R)$　即为所求的力偶

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{r}_{AB} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$$

即：　$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$

因此，两个力偶合成的结果得到一个合力偶，合力偶的力偶矩矢等于此二力偶力偶矩矢的矢量和。

推广到n个力偶组成的力偶系，于是得到：力偶系合成的结果得到一个合力偶，合力偶的力偶矩矢等于力偶系各力偶矩矢的矢量和。即：

$$\boldsymbol{M}_R = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \sum \boldsymbol{M}$$

$$M_R = \sqrt{\left(\sum M_x\right)^2 + \left(\sum M_y\right)^2 + \left(\sum M_z\right)^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{i}) = \frac{\sum M_x}{M_R} \qquad \cos(\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{j}) = \frac{\sum M_y}{M_R} \qquad \cos(\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{k}) = \frac{\sum M_z}{M_R}$$

对于平面力偶系，合成的结果为一个合力偶，合力偶的力偶矩等于力偶系各力偶矩的代数和。即：

$$M_R = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M$$

§3.6　力偶系的平衡条件

力偶系平衡的必要和充分条件

　　该力偶系的合力偶矩矢零，即力偶系各力偶矩矢的矢量和等于零。

写成矢量形式为　$\boldsymbol{M}_R = \sum \boldsymbol{M} = 0$

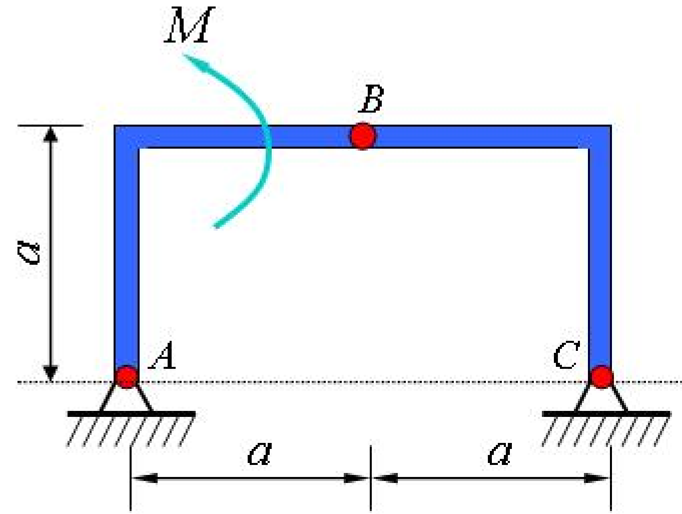
由于　$M_R = \sqrt{\left(\sum M_x\right)^2 + \left(\sum M_y\right)^2 + \left(\sum M_z\right)^2}$

$$\left.\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{称为平衡方程或平衡条件}$$

对于平面力偶系其平衡条件为：　$\sum M = 0$

例 题 已知：a, M

求：A、C 处约束反力。



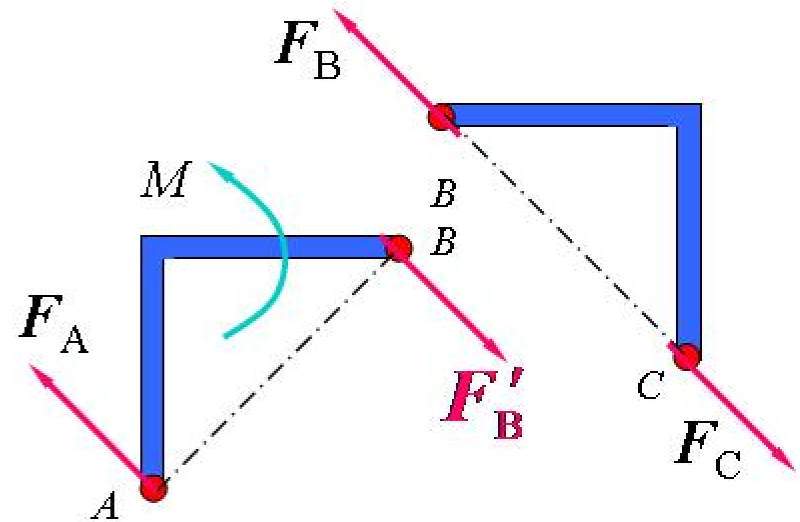
解：（1）取 AB 为研究对象

$$\sum M=0,\quad M-F_A\sqrt{2}a=0$$

$$F_A=F_B'=\frac{\sqrt{2}}{2a}M$$

（2）取 BC 为研究对象

$$F_C=F_B=F_B'=\frac{\sqrt{2}}{2a}M$$

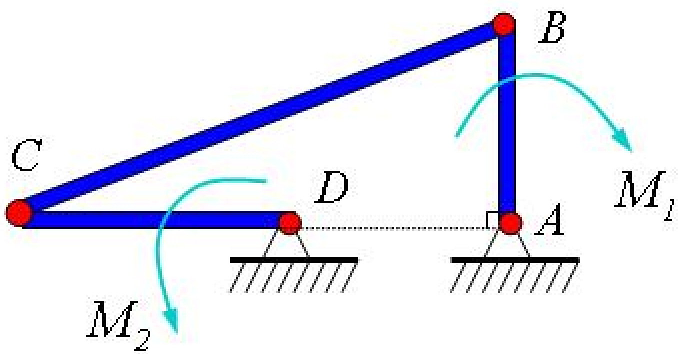


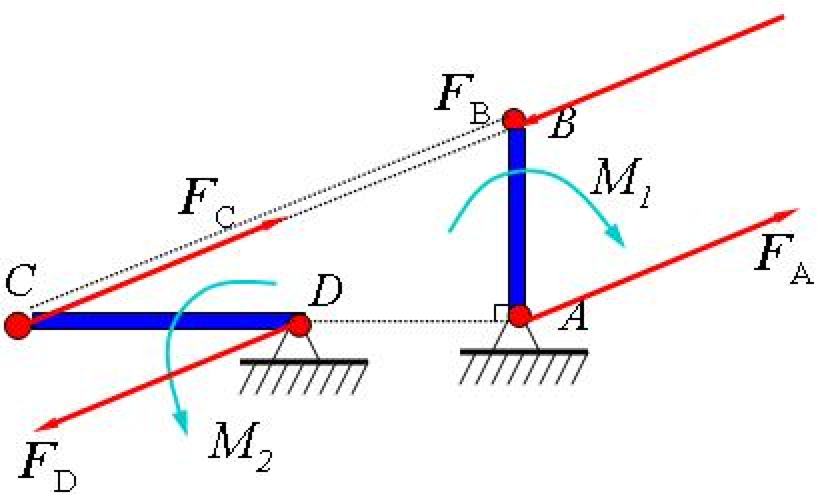
若将此力偶移至 BC 构件上，再求 A、C 处约束反力。在此种情况下，力偶能否在其作用面内移动，力偶对任意点之矩是否还等于力偶矩。

例 题

已知：$AB=CD=a$, $\angle BCD=30°$

求：平衡时M_1、M_2之间的关系。





解：(1)取AB为研究对象

$$\sum M=0,\quad F_B a\cos 30° - M_1 = 0$$

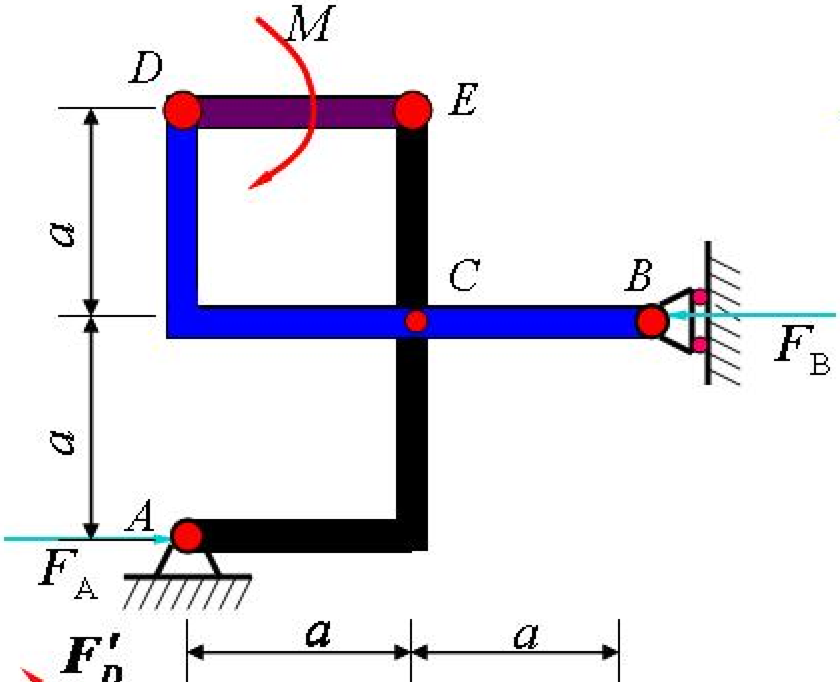
解得 $$M_1=\frac{\sqrt{3}}{2}F_B a$$

(2) 取CD为研究对象

$$\sum M=0,\quad M_2 - F_C a\sin 30° = 0$$

解得 $$M_2=\frac{1}{2}F_C a$$

因为 $F_B = F_C$ ⟹ $$\frac{M_1}{M_2}=\sqrt{3}$$



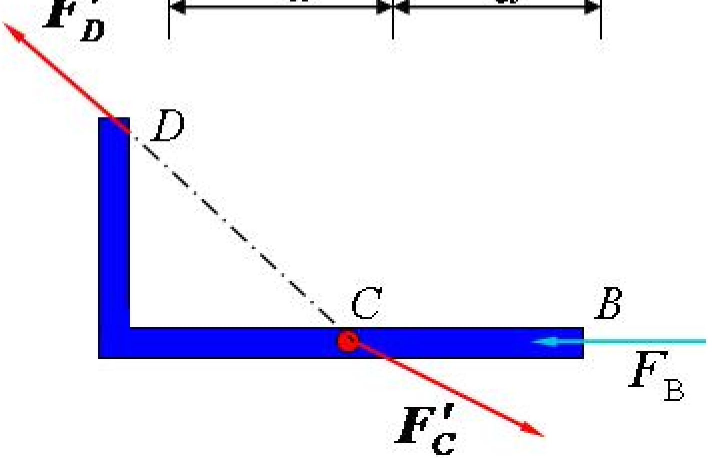
例 题

求：A、B、C、D、E处的约束反力。

解：(1) 取整体为研究对象

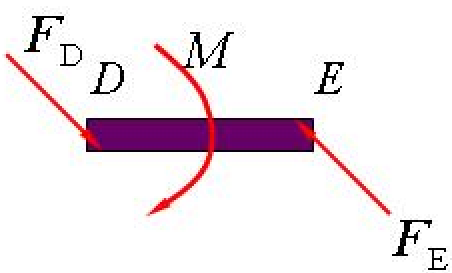
$$\sum M=0,\quad M-F_A a=0$$

$$F_A=F_B=\frac{M}{a}$$



(2) 取BCD为研究对象

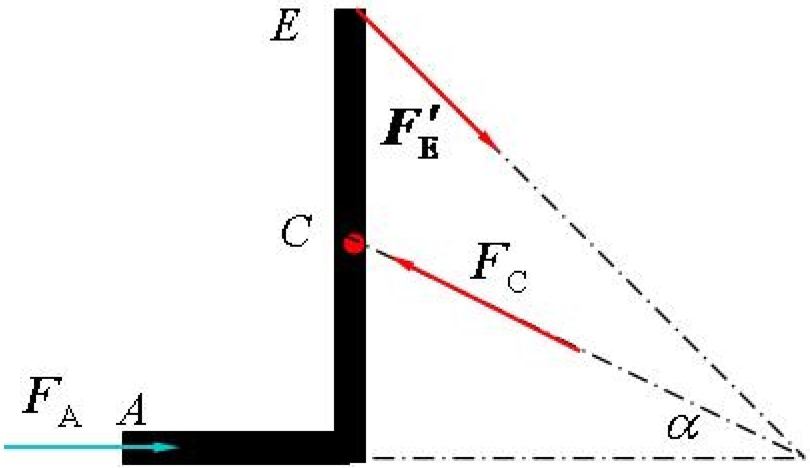
确定 D 处约束反力的方向



(3) 取DE为研究对象

$$\sum M=0,\quad F_D a\sin 45^\circ - M=0$$

$$F_D=F_E=\frac{\sqrt{2}M}{a}$$



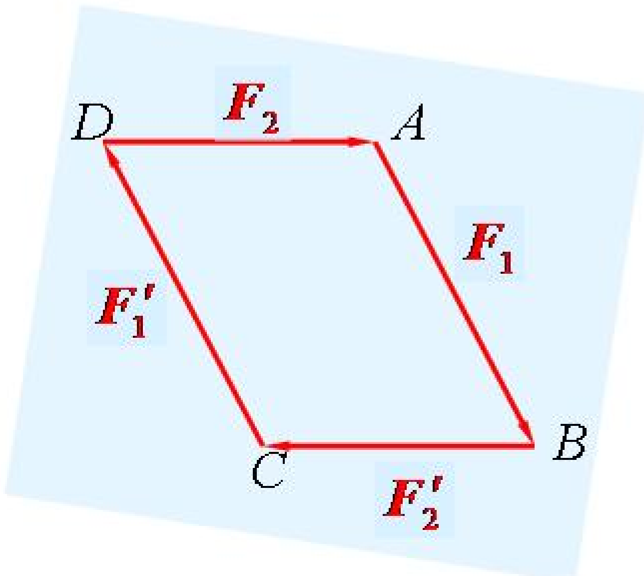
(4) 取ACE为研究对象

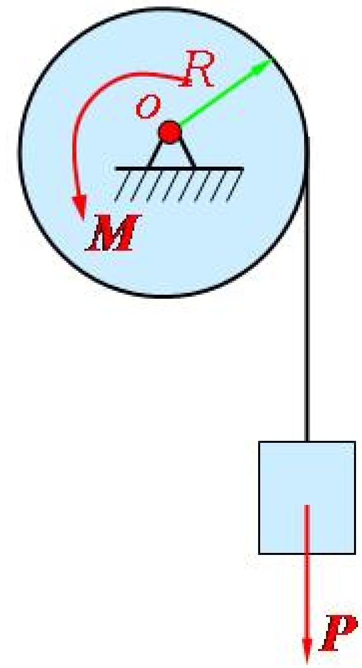
$$\sum Y=0,\quad F_C\sin\alpha-F'_E\cos 45^\circ=0$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_C=\frac{\sqrt{5}M}{a}$$

动笔又动脑





问刚体在四个力的作用下是否平衡，若改变F_1和F_1' 的方向，则结果又如何。

当 $M=PR$ 时，系统处于平衡，因此力偶也可以与一个力平衡，这种说法对吗。

本章作业

3-4、3-5、3-6、3-7

Thank you for listening!