第一章　　绪论

§1.1　常微分方程模型

例1　镭的裂变

解　　设镭的质量为 $N = N(t)$，可建立方程 $\frac{dN}{dt} = -kN$

由条件 $N(t_0) = N_0$，可得 $N = N_0 e^{-k(t-t_0)}$

例 2　RLC 电路

解　由基尔霍夫第二定律可得 $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$

例 3　数学摆

解　方程模型为 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$

§1.2　常微分方程的基本概念

1. 什么叫微分方程?

凡含有自变量、未知函数和未知函数的导数的方程，称为微分方程.

这里应注意，在一个微分方程中，不一定明显地出现自变量和未知函数，但未知函数的导数一定要出现.

2. 微分方程的阶

微分方程的阶是在微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数.

3. 关于线性和非线性微分方程

如果微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \qquad (1)$$

的左端为y及 $\frac{dy}{dx}$，…，$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理整式，则称该方程为n阶线性微分方程．否则称为非线性方程．因此，n阶线性微分方程一般形式应为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

其中 $a_1(x), \ldots,\ a_n(x), f(x)$ 是x的已知函数

4. 关于微分方程的解、通解和特解

如果把某一个函数代入一个微分方程后，使该方程成为一个恒等式，那么这个函数称为该微分方程的一个解.

例如，在微分方程 $\frac{dy}{dx}=xe^{2x}$ 中，取 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})e^{2x}$ ，代入方程左边，得

$$\text{左边}=\frac{d}{dx}[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})e^{2x}]=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{2})e^{2x}=xe^{2x}=\text{右边}.$$

故 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})e^{2x}+C$ 也都是原方程的解.

由此可知，微分方程的解并不只有一个，而是存在着无穷多个函数，同时都是它的解.所以，一个微分方程的全部解构成一个函数族.

附加了初值条件的微分方程求解问题，称为初值问题．本教材仅讨论初值问题.

一般地说，一阶微分方程只需要一个初值条件，n 阶微分方程应有 n 个初值条件.

5. 积分曲线与方向场

一阶方程的一个特解 $y=\varphi(x)$ 的图象是 xoy 平面上的一条曲线，称为方程的**积分曲线**，而通解 $y=\varphi(x,C)$ 的图象是平面上的一族曲线，称为**积分曲线族**.

作业：P26　　3.　4.　8.