第二章　一阶微分方程的初等解法

§2.1 变量分离方程与变量变换

要求：熟练掌握变量分离方程的解法

本节重点：变量分离方程的解法；难点：变量变换**.**

2.1.1 变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y),$$

或

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$$

分离变量即可求解.

例 1 求解方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.　（解为 $y=\pm\sqrt{c-x^2}$ ）

例 2 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-c+dx)}{x(a-by)}$， $x\geq 0, y\geq 0$.　（解为 $x^c e^{-dx} y^a e^{-by}=k$ ）

例 3（略）

例 4 求解方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$.（解为 $y=ce^{\int P(x)dx}$ ）

2.1.2 可化为变量分离方程的类型

令 $u=\frac{y}{x}$，可化为变量分离的方程

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

求解.

例 5 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\tan\frac{x}{y}$.　（解为 $\sin u=cx$，即 $\sin\frac{y}{x}=cx$ ）

例 6 求解方程 $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y\quad(x<0)$，.

（解为 $y=\begin{cases} x[\ln(-x)+c]^2, & \ln(-x)+c>0, \\ & 0 \end{cases}$ ）.

（2）　　可化为齐次方程

方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}$ 分三种情况进行求解.

当 $C_1,C_2=0$ 时，可化为齐次方程求解.

当 C_1, C_2 不全为零时，但 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \neq \frac{c_1}{c_2}$，我们令 $u = a_2 x + b_2 y$，可将方程化为变量分离方程

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx} = a_2 + b_2 \frac{ku + c_1}{u + c_2}$$

求解.

当 C_1, C_2 不全为零时，但 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，即 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$，令变换

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

其中 x_0，y_0 是待定常数（即两直线的交点），可将方程化为关于 X 与 Y 的齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y} = g(\frac{Y}{X})$$

求解，最后代回原变量即可得原方程的解.

例 7 求解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$ （解为 $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = c$）.

2.1.3 应用举例

例 8 电容器的充电与放电（P_{39}）.

例 9 探照灯反射镜面的形状 （P_{41}）

习题 2. 1

1.（1），（3），（5），（7），（9）；2. （1），（3），（5），（7）；3.（1）；4；6；9.

§2.2 线性微分方程与常数变易法

要求：熟练掌握一阶非齐次线性微分方程的解法

本节重点：一阶非齐次线性微分方程的解法（即常数变易法）

一阶线性微分方程

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0,$$

当 $a(x) \neq 0$ 的区间上可以写成

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x), \qquad (2.2.1)$$

其中$P(x),Q(x)$在考虑的区间上是x的连续函数.

若 $Q(x)=0$，（2.21）变为

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y\,, \tag{2.2.2}$$

（2.2.2）称为**一阶齐次线性微分方程**

若 $Q(x)\neq 0$，（2.21）称为**一阶非齐次线性微分方程.**

齐线性方程变量分离求解，得

$$y=ce^{\int P(x)dx}. \tag{2.2.3}$$

非齐线性方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$用常数变易法求解.

$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c)$为非齐线性方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$通解公式。

常数变易法实际上是一种变量变换的方法，通过（2.2.4）可将方程（2.2.1）化为变量分离方程.

例1　求方程$(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^{x}(x+1)^{n+1}$的通解.

（解为$y=(x+1)^{n}(e^{x}+c)$）

例2　求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^{2}}$的通解.

（解为$x=y^{2}(c-\ln|y|)$）

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^{2}\,, \tag{2.2.7}$$

的方程，称为伯努利（Bernoulli）方程. 这里$P(x),Q(x)$是x的连续函数，$n\neq 0,1$是常数.

利用变量变换可将伯努利（Bernoulli）方程化为线性微分方程.

例3　求方程$\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^{2}$的通解.

（解为$\frac{1}{y}=\frac{c}{x^{6}}+\frac{x^{2}}{8}$，或 $\frac{x^{6}}{y}-\frac{x^{8}}{8}=c$及$y=0$）

习题 2.2

1.（1），（3），（5），（7），（9），（11），（13），（15）；2.　3.　5.（1），（3）；　7.　（1），（3）.

§2.3　恰当微分方程与积分因子

要求：熟练掌握恰当微分方程的解法，积分因子的求法.

本节重点：恰当微分方程的解法，积分因子的求法. 难点：积分因子的求法.

2.3.1 恰当微分方程（全微分方程）

如果微分方程（2.3.1）的左端恰是某一函数$u(x,y)$的全微分，即

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (2.3.2)$$

则称（2.3.1）为**恰当微分方程（或全微分方程）.**

容易验证，（2.3.1）的通解是 $u(x,y)=c$, （2.3.3）

其中c是任意常数. $u=u(x,y)$.

问题：

（1） 如何判断（2.3.1）是恰当微分方程？

（2） 如果（2.3.1）是恰当微分方程，如何求得函数$u=u(x,y)$？

（3）如果（2.3.1）是恰当微分方程，函数$M(x,y),N(x,y)$应有什么性质？

恰当微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2.3.5)$$

恰当微分方程（2.3.2）的通解是

$$\int M(x,y)dx+\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy=c, \qquad (2.3.9)$$

例1 求方程$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$的通解.

（解为$x^3+3x^2y^2+y^4=c$）

采用“分项组合”的办法，先把那些本身已构成全微分的项分出，再把剩下的项凑成全微分. 这要求熟记一些简单二元函数的全微分。

例 2 求解微分方程$(3x^2+y\cos x)dx+(\sin x-4y^3)dy=0$

（解为$x^3+y\sin x-y^4=c.$）

2.3.2 积分因子法.

给出微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.17)$$

如果它不是恰当微分方程，如果能找到一个函数$\mu(x,y)\neq 0$, 使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)ay=0$$

是一个恰当微分方程，即存在函数v，使

$$\mu M(x,y)+\mu N(x,y)\equiv dv \qquad (2.3.18)$$

则称函数 $\mu(x,y)$ 是方程（2.3.17）的一个积分因子.

这时 $v(x,y)=c$ 是（2.3.18）的通解，因而也是（2.3.18）的通解.

同一方程 $ydx-xdy=0$ 可以有不同的积分因子

一个方程如果存在积分因子，那么积分因子不只是一个．方程解的形式也不一定相同.

函数 $\mu(x,y)$ 为（2.3.17）的积分因子的充要条件是

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu, \qquad (2.3.19)$$

如果方程满足条件

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$$

它仅是 x 的函数，那么易求其积分因子为 $\mu=e^{\int\psi(x)dx}$.

同样，方程满足条件

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\Phi(y)$$

它仅是 y 的函数，那么易求其积分因子为 $\mu=e^{\int\Phi(y)dy}$.

例 3　试用积分因子法解线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$.

（解为 $y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c)$）

作业：**习题 2.2**

1.（1），（3），2.（1），（3），（5），（7），（9），（11）；　3. 4. 5. 7. 8.

§2.4　一阶隐方程与参数表示

要求：熟练掌握一阶隐分方程的解法.

本节重点：一阶隐方程的解法克莱罗方程的求法．难点：一阶隐方程的求法.

求解隐式方程

$$F(x,y,y')=0 \qquad (2.4.1)$$

的问题分两种情况考虑：

1．　假如能从(2.4.1)中把 y' 解出，就得到一个或几个显式方程

$$y'=f_i(x,y) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

如果能用初等积分法求出这些显式方程的解，那么就得到方程(2.4.1)的解.

例 1 求解方程

$$y'^2-(x+y)y'+xy=0$$

（解为 $y=\frac{1}{2}x^2+c$ 及 $y=Ce^x$）

2．如果在(2.4.1)中不能解出 y' 时，则可用下面介绍的“参数法”求解，本节主要介绍其中两类可积类型，

类型 Ⅰ $y=f(x,y'),\quad x=f(y,y')$

类型 Ⅱ $F(x,y')=0,\quad F(y,y')=0$

2.4.1 可以解出 y（或 x）的方程

考虑类型Ⅰ中的方程

$$y=f(x,y') \tag{2.4.2}$$

注意：当从方程(2.4.4)中解出 $p=p(x,c)$ 时，只 要将其代入(2.4.3)的第三式，就得到(2.4.2)的通解了，而不要再将 p 认为 y'，再积分来求 y.

同理，可以考虑类型Ⅰ的方程

$$x=f(y,y') \tag{2.4.5}$$

例 2 求解方程

$$y=y'^2-xy'+\frac{1}{2}x^2$$

（解为 $y=\frac{x^2}{4}$ 及 $y=\frac{1}{2}x^2+Cx+C^2$）

例 3 求解方程

$$y=xy'+\varphi(y') \tag{2.4.9}$$

这里，假定 $\varphi(x)$ 是二次可微函数.

（解为 $y=Cx+\varphi(C)$ 和 $y=Cx+\varphi(C)$）

方程(2.4.9)称为克莱洛 (Clairaut)方程. 由(2.4.11)式可知，它的通解恰好是在方程(2.4.9)中用 C 取代 y' 而成.

2.4.2　不显含 y（或 x）的方程

类型Ⅱ的特点是，方程中不含 y 或 x

考虑类型Ⅰ中的方程

$$F(x,y')=0$$

（2.4.13）

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$$

得到方程(2.4.13)的参数形式通解

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C \end{cases}$$

同理，可以讨论类型Ⅱ的方程

$$F(y,y')=0$$

(2.4.17)

$$\begin{cases} y=\varphi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$$

(2.4.17)的参数形式通解为

$$\begin{cases} x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

例 4 求解方程 $x\sqrt{1+y^2}=y'$.

（解为 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=-\cos t+C \end{cases}$ ）

作业：P58, 1,2,3,4,5,6