第三章　一阶微分方程的解的存在定理

§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法

3.1.1　存在唯一性定理

定理 1　如果 $f(x,y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足李普希兹条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.1}$$

存在唯一解 $y=\varphi(x)$ 定义于区间 $|x-x_0|\le h$ 上，连续且满足初始条件

$$\varphi(x_0)=y_0 \tag{3.3}$$

其中 $h=\min(a,\dfrac{b}{M}),\ M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$

可用皮卡（Picard）逐步逼近法证明这个定理，此外，用欧拉折线法（差分法）、绍德尔（Schouder）不动点方法等亦可证明.

逐步逼近法的基本思想

分五个命题来证明定理.

命题 1　设 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的定义于区间 $x_0\le x\le x_0+h$ 上，满足初始条件

$$\varphi(x_0)=y_0$$

的解，则 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx,\ x_0\le x\le x_0+h \tag{3.5}$$

的定义于区间 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解，反之亦然.

现取 $\varphi(x_0)=y_0$，构造皮卡逐步逼近函数序列如下：

$$\begin{cases}\varphi(x_0)=y_0\\ \varphi_{\mathrm{n}}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi)dx\quad x_0\le x\le x_0+h,\quad (n=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{3.7}$$

命题 2　对于所有的 n，(3.7)中函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le b \tag{3.8}$$

命题 3　函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上是一致收敛的.

设 $\lim\limits_{n\to 0}\varphi_n(x)=\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 也在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上连续，且由(3. 8)又可知，

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le b$$

命题 4　$\varphi(x)$ 是积分方程（3.5）定义于区间 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的连续解.

命题 5　设 $\psi(x)$ 是积分方程（3.5）定义于区间 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的另一个连续解，则 $\varphi(x) = \psi(x),\quad (x_0 \le x \le x_0 + h)$.

附注 1　（P84）

附注 2　由于利普希兹条件比较难于检验，常用 $f(x, y)$ 在 R 上对于 y 的连续偏导数代替.

附注 3　（P85）

定理 2　如果在点 (x_0, y_0, y_0') 的某个邻域内，

1°　$F(x, y, y')$ 对所有变元连续，且存在连续偏导数；

2°　$F(x_0, y_0, y_0') = 0$；

3°　$\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \ne 0$；

则方程(3.15)存在唯一解.

$$y = y(x),\quad |x - x_0| \le h$$　（h 未足够小的任意正数）

满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

3.1.2　近似计算与误差估计

在(3.14)中令 $\varphi(x) = \psi(x)$,　可得第 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 和真正解 $\varphi(x)$ 在区间

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \tag{3.19}$$

在近似计算时，可根据误差的要求，选取适当的逐步逼近函数 $\varphi_n(x)$.

例 1　方程 $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 定义于矩形区域 $R: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ 上，试利用存在唯一性定理确定过点 $(0, 0)$ 的解的存在区间，并求在此区间上与真正解的误差不超过 0.05 的近似解的表达式.

作业：P88　1、3、4、5、7、9

§3. 2　解的延拓

局部利普希兹条件，即对于内的每一点，有以其为中心的完全含于G内的闭矩形R存在，在R上$f(x,y)$关于y满足利普希兹条件.

解的延拓定理　如果方程(3.1)右端的函数$f(x,y)$在有界区域内连续，且在G内关于y满足局部利普希兹条件，则方程(3.1)的通过G内任意一点(x_0,y_0)的解$y=\varphi(x)$可以延拓，直到点$(x,\varphi(x))$任意接近区域G的边界. 以向x增大的一方的延拓来说，如果$y=\varphi(x)$只能延拓到区间$x_0\le x\le m$上，则当$x\to m$时，$(x,\varphi(x))$趋于区域G的边界.

推论　如果G是无界区域，在上面解的延拓定理的条件下，方程(3.1)的通过(x_0,y_0)的解$y=\varphi(x)$可以延拓，以向x增大的一方的延拓来说，有下面两种情况：

(1)　解$y=\varphi(x)$可以延拓到区间$[x_0,+\infty)$；

(2)　解$y=\varphi(x)$只可以延拓到区间$[x_0,m)$，其中m为有限数，则当$x\to m$时，或者$y=\varphi(x)$无界，或者点$(x,\varphi(x))$趋于区域G的边界.

例1　讨论方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$的分别通过点$(0,0),(\ln 2,-3)$的解的存在区间.

例2　讨论方程$\dfrac{dy}{dx}=1+\ln x$满足条件$y(1)=1$的解的存在区间.

§3. 3　解对初值的连续性和可微性定理

3. 3. 1　解关于初值的对称性

解关于初值的对称性定理　设方程(3.1)的满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解是唯一的，记为$y=\varphi(x,x_0,y_0)$，则在表达式中，(x,y)和(x_0,y_0)可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0=\varphi(x_0,x,y)$$

3. 3. 2　解对初值的连续依赖性

引理　如果函数$f(x,y)$在某区域D内连续，且关于y满足利普希兹条件，则对方程(3.1)的任意两个解$\varphi(x)$和$\psi(x)$，在它们的公共存在区间成立着不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\le|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|\,e^{L|x-x_0|} \tag{3.20}$$

其中 x_0 为所考虑区间内的某一值.

解对初值的连续依赖性定理 设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部利普希兹条件，$(x_0,y_0)\in G$， $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是(3.1) 的满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，它在区间 $a\le x\le b$ 上有定义 $(a\le x_0\le b)$，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$ 使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$$

时，方程(3.1)的满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在区间 $a\le x\le b$ 上也有定义，并且

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\le\varepsilon,\quad a\le x\le b$$

证明（略，见 P96）

解对初值的连续性定理 若 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部利普希兹条件，则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的.

3.3.3 解对初值的可微性

解对初值的可微性定理 若 $f(x,y)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续，则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是可微的.

证明（略，见 P100）