# 第四章　高阶线性方程

## §4.1　线性微分方程的一般理论

### 4.1.1　引言

本章主要讨论如下$n$阶线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \tag{4.1}$$

其中$a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$及$f(t)$均为区间$a\le t\le b$上的连续函数.

若$f(t)\equiv 0$，则方程(4.1)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \tag{4.2}$$

称之为$n$阶**齐线性微分方程**，简称为**齐线性方程**，称(4.1)为$n$阶**非齐线性微分方程**，简称为**非齐线性方程**，称(4.2)为**对应于方程(4.1)的齐线性方程**.

方程(4.1)的解的存在唯一性定理

**定理 1**　若$a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$及$f(t)$均为区间$a\le t\le b$上的连续函数，则对于任意$t_0\in[a,b]$及任意的$x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$，方程(4.1)存在唯一解$x=\varphi(t)$，定义于区间$a\le t\le b$上，且满足初始条件：

$$\varphi(t_0)=x_0,\ \frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(1)},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(n-1)} \tag{4.3}$$

证明在下一章给出.

### 4.1.2 齐线性方程的解的性质与结构

首先讨论齐线性方程(4.2)，易得齐线性方程的解的叠加原理.

**定理 2（叠加原理）**　若$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$是方程(4.2)的$k$个解，则它们的线性组合$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$也是(4.2)的解，其中$c_1,c_2,\cdots,c_k$是任意常数.

当$n=k$时，方程(4.2)有解

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \tag{4.4}$$

在什么条件下，(4.4)能成为$n$阶齐线性方程(4.2)的通解？

考虑定义在区间 $a \le t \le b$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，使得恒等式 $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0$ 对于任意的 $t \in [a, b]$ 均成立，则称这些函数**线性相关**，否则就称这些函数在所给区间上**线性无关**.

**例**（略）

由定义在区间 $a \le t \le b$ 上的 $k$ 个可微 $k-1$ 次的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 所成的行列式

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] \equiv W(t)$$
$$\equiv \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的**伏朗斯基行列式**.

**定理 3**　若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则在 $[a,b]$ 上它们的伏朗斯基行列式 $W(t) \equiv 0$.

这个定理的逆命题一般不成立（例子见 P 105）.

**定理 4**　若方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)]$ 在此区间的任何点上均不等于零，即 $W(t) \ne 0 \quad (a \le t \le b)$.

**定理 5**　$n$ 阶齐线性方程(4.2)一定存在 $n$ 个线性无关解.

**定理 6（通解结构定理）**　若 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程(4.2)的 $n$ 个线性无关解，则方程(4.2)的通解可表为

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \tag{4.11}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数．且通解(4.11)包括了方程(4.2)的所有解.

**推论**　方程(4.2)的线性无关解的最大个数等于 $n$．因此可得结论：$n$ 阶齐线性方程的所有解构成一个 $n$ 维线性空间.

方程(4.2)的一组 $n$ 个线性无关解称为方程的一个**基本解组**，显然，基本解组不唯一.

### 4.1.3　非齐线性方程与常数变易法

考虑 $n$ 阶非齐线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \tag{4.1}$$

易见方程(4.2)是它的特殊情形.

**性质 1** 若 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.1)的解，而 $x(t)$ 是方程(4.2)的解，则 $\bar{x}(t)+x(t)$ 也是方程(4.1)的解.

**性质 2** 方程(4.1)的任意两个解之差必为方程(4.2)的解.

**定理 7** 设 $x_1(t), x_2(t),\cdots, x_n(t)$ 是方程(4.2)的基本解组，而 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.1)的某个解，则方程(4.1)的通解可表为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t) \tag{4.14}$$

其中为任意常数．且通解(4.14)包括了方程(4.1)的所有解.

定理告诉我们，要解非齐线性方程，只需知道它的一个解和对应的齐线性方程的基本解组即可. 事实上，只要知道对应的齐线性方程的基本解组就可以利用常数变易法求得非齐线性方程的解.

**常数变易法** 设 $x_1(t), x_2(t),\cdots, x_n(t)$ 是方程(4.2)的基本解组，因而

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)) \tag{4.15}$$

为(4.2)的通解．把其中的任意常数 $c_i$ 看作 $t$ 的待定函数 $c_i(t)\quad(i=1, 2,\cdots, n)$，(4.15)变为

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)) \tag{4.16}$$

将它代入方程(4.1)，就得到 $c_1(t), c_2(t),\cdots, c_n(t)$ 必须满足的一个方程，但待定函数有 $n$ 个，为了确定它们，还需再找出 $n-1$ 个限制条件，理论上，这些条件可任意给出。

如果已知对应的齐线性方程的基本解组，则非齐线性方程的任一解可由求积得到. 因此，对于线性方程来说，关键是求出齐线性方程的基本解组.

**例 1**（见课本 P112 例 1）

**例 2**（见课本 P112 例 2）

**作业** P113 (1、2、4、6、7、8、9)

## § 4.2 常系数线性微分方程的解法

### 4.2.1 复值函数与复值解

如果对于区间 $a \le t \le b$ 中的每一实数 $t$，有复数 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是在区间 $a \le t \le b$ 上定义的实函数，$i$ 是虚数单位，则称在区间 $a \le t \le b$ 给定了一个**复值实函数** $z(t)$ .

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 当 $t$ 趋于 $t_0$ 时有极限，并且定义

$$\lim_{t\to t_0} z(t)=\lim_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim_{t\to t_0}\psi(t)$$

如果 $\lim_{t\to t_0} z(t)=\lim_{t\to t_0} z(t_0)$，则称 $z(t)$ **在 $t_0$ 连续**.

显然 $z(t)$ 在 $t_0$ 连续相当于 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $t_0$ 连续.

当 $z(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上每一点连续时，就称 **$z(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 连续.**

如果极限 $\lim_{t\to t_0}\dfrac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$ 存在，就称 **$z(t)$ 在 $t_0$ 有导数**. 且记此极限为 $\dfrac{dz(t_0)}{dt}$ 或 $z'(t_0)$ .

显然 $z(t)$ 在 $t_0$ 有导数相当于 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $t_0$ 有导数，且

$$\frac{dz(t_0)}{dt}=\frac{d\varphi(t_0)}{dt}+i\frac{d\psi(t_0)}{dt}$$

如果 $z(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上每一点都有导数，就称 **$z(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上有导数.**

高阶导数可以类似地定义.

设 $z_1(t)$、$z_2(t)$ 是定义在 $a \le t \le b$ 上的可微函数，$c$ 是复值常数，易证下列等式成立：

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)+z_2(t)]=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[cz_1(t)]=c\frac{dz_1(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2(t)]=\frac{dz_1(t)}{dt}\cdot z_2(t)+z_1(t)\cdot\frac{dz_2(t)}{dt}$$

设 $K=\alpha+i\beta$ 为任一复数，这里 $\alpha,\beta$ 为实数，$t$ 为实变量，定义

$$e^{Kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

由上式可得

$$\cos\beta t=\frac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})$$

$$\sin\beta t=\frac{1}{2i}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})$$

$e^{Kt}$ 的性质

(1) $e^{(K_1+K_2)t} = e^{K_1 t} \cdot e^{K_2 t}$

(2) $\dfrac{de^{Kt}}{dt} = Ke^{Kt}$

(3) $\dfrac{d^n}{dt^n} e^{Kt} = K^n e^{Kt}$

定义于区间 $a \le t \le b$ 上的实变量复值函数 $x = z(t)$ 称为方程(4.1)的**复值解**，如果

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt} + a_n(t)z(t) \equiv f(t)$$

对于 $a \le t \le b$ 恒成立.

**定理 8** 如果方程(4.2)中所有系数 $x = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ 是方程的复值解，则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$、虚部 $\psi(t)$ 和共轭复值函数 $\bar{z}(t)$ 也都是方程(4.2)的解.

**定理 9** 若方程

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt} + a_n(t)z(t) = u(t) + iv(t)$$

有复值解 $x = U(t) + iV(t)$，这里 $a_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 及 $u(t), v(t)$ 都是实值函数，那么这个解的实部 $U(t)$ 和虚部 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = v(t)$$

的解.

### 4.2.2 常系数齐次线性微分方程和欧拉方程

设齐次线性微分方程中所有系数都是常数，即方程形式为

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \tag{4.19}$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数. 称(4.19)为$n$阶常系数齐次线性微分方程.

(4.19)的基本解组的**殴拉待定指数函数法(又称为特征根法)**

(4.20)为(4.19)的解的充要条件是$\lambda$是代数方程

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{4.21}$$

的根. 称它为方程(4.19)的**特征方程,** 它的根就称为**特征根.**

**(1)** 特征根是单根的情形

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是**特征方程**(4.21)的$n$个彼此不相等的根, 则相应的方程(4.19)有如下$n$的解

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}, \tag{4.22}$$

$n$个解在区间$a \le t \le b$上线性无关, 从而组成方程的基本解组.

如果$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为实数，则(4.22)是方程(4.19) $n$个线性无关的实数解，方程(4.19)的通解为

$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$，其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为任意常数.

如果特征方程(4.21)有复根，由于其系数是实的，它的复根一定是共轭成对地出现. 设$\lambda_1 = \alpha + i\beta$是一特征根, 则$\lambda_2 = \alpha - i\beta$也是(4.21)的根. 由定理 4.8， 这两个特征根所对应的解是实变量复值函数, 因而与这对共轭复根对应的, 方程(4.19)有两个复值解

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + \sin\beta t),$$
$$e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - \sin\beta t).$$

由定理 4.8，它们的实部和虚部也是方程的解. 这样可求得方程(4.19)的两个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(2)特征根有重根

设$\lambda_1$是(4.21)的$k(1 < k \le n)$重根(实的或复的)，由定理 4.8 知$e^{\lambda_1 t}$是(4.21)的一个解，如何求出其余的 $k$-1 个解呢?

设$\lambda_1 = 0$，即特征方程有因子$\lambda^k$，$\dfrac{d^n x}{dt^n} + a_1\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\dfrac{d^k x}{dt^k} = 0,$ 有 $k$ 个解

$1, t, t^2, \cdots, t^{k-1}$，而且它们是线性无关的.

如果这 $k$ 重根 $\lambda_1 \neq 0$，作变量变换，$x = ye^{\lambda_1 t}$,方程(4.19)有 $k_1$ 个解

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \tag{4.25}$$

对于特征方程有复重根的情况，不妨假设 $\lambda = \alpha + i\beta$ 是 $k$ 重特征根，则 $\overline{\lambda} = \alpha + i\beta$ 也是 $k$ 重特征根，仿 1)处理，得到(4.19)的 $2k$ 个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta te^{\alpha t}, t\cos\beta te^{\alpha t}, t^2\cos\beta te^{\alpha t}, \cdots, t^{k-1}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta te^{\alpha t},\ t\sin\beta te^{\alpha t}, t^2\sin\beta te^{\alpha t}, \cdots, t^{k-1}\sin\beta t$$

例1　求方程 $\frac{d^4x}{dt^4} - x = 0$ 的通解.

（通解为 $x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t$，这里 $c_1, c_2, c_3, c_4$ 为任意常数.）

**例 2**　求方程 $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0$ 的通解.

（通解为 $x = c_1e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$，这里 $c_1, c_2, c_3$，为任意常数）

**例 3**　求方程 $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0$ 的通解.

（通解 $x = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^t$，这里 $c_1, c_2, c_3$，为任意常数）

**例4**　求方程 $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ 的通解.

（通解为 $x = (c_1 + c_2t)\cos t + (c_3 + c_4t)\sin t$，这里 $c_1, c_2, c_3, c_4$ 为任意常数.）

作业　$P164$　2(单号习题)

欧拉方程

形如

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_ny = 0 \tag{4.29}$$

的方程称为欧拉方程，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数. 此方程可以通过变量变换化为常系数齐次

线性微分方程，因而求解问题也就可以解决.

方程（4.31）的 $m$ 重实根 $K=K_0$，对应于方程（4.29）的 $m$ 个解

$$x^{K_0}, x^{K_0}\ln|x|, x^{K_0}\ln^2|x|, \cdots, x^{K_0}\ln^{m-1}|x|$$

方程（4.31）的 $m$ 重复根 $K=\alpha+i\beta$，对应于方程（4.29）的 $2m$ 个实值解

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\cos(\beta\ln|x|), \cdots, x^{\alpha}\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|),$$

$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\sin(\beta\ln|x|), \cdots, x^{\alpha}\ln^{m-1}|x|\sin(\beta\ln|x|).$$

**例5**　求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解

（通解为 $y=(c_1+c_2\ln|x|)x$，这里 $c_1, c_2$ 为任意常数.）

**例6**　求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ 的通解

(通解为 $y=\dfrac{1}{x}(c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|))$，这里 $c_1, c_2$ 为任意常数)

## 4.2.3　常系数非齐次线性微分方程•比较系数法与拉普拉斯变换法

常系数非齐次线性微分方程

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \qquad (4.32)$$

的求解问题，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数，而 $f(t)$ 为连续函数.

（一）　比较系数法

**类型 1**

设　$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$，其中 $\lambda$ 及 $b_i$（$i=0,1,\cdots,m$）为实常数，则方程（4.32）有形如

$$\bar{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}, \qquad (4.33)$$

的特解，其中 $k$ 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 $\lambda$ 的重数（单根相当于 $k$ =1；当 $\lambda$ 不是特征根时，取 $k$ =0），而 $B_0, B_1, \cdots, B_{m-1}, B_m$ 是待定常数，可以通过比较系数法来确定.

（1） 如果$\lambda$=0，则此时

$$f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m$$

分两种情形讨论

1） 在$\lambda$=0 不是特征根的情形，即$F(0)\neq 0$，

2） 在 $\lambda$ =0 是 $k$ 重 特 征 根 的 情 形 ， 即

$$F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(k-1)}(0)=0,\ F^{(k)}(0)\neq 0，$$

（2） 如果$\lambda\neq 0$，则作变量变换$x=ye^{\lambda t}$，将方程（4.32）化为

$$\frac{d^ny}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dt}+A_ny=b_0t^m+\cdots+b_m \tag{4.37}$$

其中$A_1,A_2,\cdots,A_n$都是常数.

在$\lambda$不是特征方程（4.21）的根的情形，方程（4.37）有特解

$\bar{y}=\bar{B}_0t^m+\bar{B}_1t^{m-1}+\cdots+\bar{B}_{m-1}t+\bar{B}_m$，因而方程（4.32）有特解

$$\bar{x}=(\bar{B}_0t^m+\bar{B}_1t^{m-1}+\cdots+\bar{B}_{m-1}t+\bar{B}_m)e^{\lambda t}.$$

在$\lambda$是特征方程（4.21）的$k$重根的情形，方程（4.37）有特解

$\bar{y}=t^k(\bar{B}_0t^m+\bar{B}_1t^{m-1}+\cdots+\bar{B}_{m-1}t+\bar{B}_m)$，因而方程（4.32）有特解

$$\bar{x}=t^k(\bar{B}_0t^m+\bar{B}_1t^{m-1}+\cdots+\bar{B}_{m-1}t+\bar{B}_m)e^{\lambda t}.$$

**例7** 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$的通解

（通解为$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}$）

**例8** 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$的通解

(通解为$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}$)

**例9** 求方程$\frac{d^3x}{dt3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$的通解

(通解为$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$，这里$c_1,c_2,c_3$为任意常数)

作业　$P164$　3

**类型 2**

设 $f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中$\alpha,\beta$为实常数，而$A(t),B(t)$是带实系数的$t$的多项式，其中一个的次数为$m$，而另一个的次数不超过$m$，则有如下结论：方程（4.32）有形如

$$\overline{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},\qquad（4.38）$$

的特解，其中$k$为特征方程$F(\lambda)=0$的根$\alpha+i\beta$的重数，而$P(t),Q(t)$为待定的带实

$P(t)=2\operatorname{Re}\{D(t)\},Q(t)=2\operatorname{Im}\{D(t)\}$，可以通过比较系数法来确定.

**例10**　求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$的通解

(通解为$x=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\dfrac{1}{8}\sin 2t$)

特殊情形

$$f(t)=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,\ 或\ f(t)=B(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

可用**复数法**求解.

**例11**　求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$的通解

(通解为$x=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\dfrac{1}{8}\sin 2t$)

（二）拉普拉斯变换法

常系数齐次线性微分方程（组）还可以应用拉普拉斯变换法进行求解.

由积分

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

所定义的确定于复平面（$\operatorname{Re}s>\sigma$）上的复变数$s$的函数$F(s)$，称为函数$f(t)$的**拉普拉斯变换**，其中$f(t)$于$t\ge 0$上有定义，且满足不等式$|f(t)|<Me^{\sigma t}$，这里

$M,\sigma$为两个正常数. 称$f(t)$为原函数，而$F(s)$称为像函数.

应用

设给定微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (4.32)$$

及初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0^{n-1}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数，而 $f(t)$ 为连续函数且满足原函数的条件.

**例12** 求方程 $\frac{dx}{dt}-x=e^{2t}$ 满足初始条件 $x(0)=0$ 的解

(解为 $x(t)=e^{2t}-e^t$ )

**例13** 求解方程 $x''+a^2x=b\sin at$； $x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$，其中 $a,b$ 为非零常数.

$$\begin{aligned}\text{解为} x(t)&=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)+x_0\cos at+\frac{x_0'}{a}\sin at\\ &=\frac{1}{2a^2}[(b+2ax_0')\sin at+a(2ax_0-bt)\cos at)]\end{aligned}$$

**习题** 第 165 页第 4、6、7 题

# §4.3 高阶方程的降阶和幂级数解法

## 4.3.1 可降阶的一些方程类型

$n$ 阶微分方程一般地可写为

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$$

**（1）方程不显含未知函数** $x$，或更一般地，设方程不含 $x,x',\cdots,x^{(k-1)}$，即方程为

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0 \quad (1\le k\le n) \qquad (4.57)$$

令 $x^{(k)}=y$，则方程即降为关于 $y$ 的 $n-k$ 阶方程

特别地, 若方程不显含 $x$（相当于 $n=2,k=1$ 的情形），则由变换 $x'=y$ 便把方程化为一阶方程.

例 1 求方程 $\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4}=0$ 的解.

（通解为 $x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_5$ 是任意常数）

**（2）不显含自变量 $t$ 的方程**

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \qquad (4.59)$$

令 $x' = y$，并以它为新未知函数，而视 $x$ 为新自变量，则方程可降低一阶.

**例 2** 求方程 $xx'' + (x')^2 = 0$ 的解.

（通解为 $x^2 = c_1 t + c \quad (c_1 = 2c)$ 其中 $c_1, c$ 是任意常数）

**（3）齐线性微分方程**

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{4.2}$$

### 4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法

考虑齐线性微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{4.72}$$

及初始条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ 的情况.

**定理 10** 若方程（4.72）中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展成 $x$ 的幂级数，且收敛区间为 $|x| < R$，则方程（4.72）有形如

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.73}$$

的特解，也以 $|x| < R$ 为级数的收敛区间.

$n$ 阶贝**塞尔方程**

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2 y) = 0 \tag{4.74}$$

### 4.3.3 第二宇宙速度计算

建立物体垂直上抛运动的微分方程. 以 $M, m$ 分别表示地球和物体的质量.按牛顿万有引力定律，作用于物体的引力 $F$（空气阻力忽略不计）为

$$F = k\frac{mM}{r^2} \tag{4.80}$$

这里 $r$ 表示地球的中心和物体重心之间的距离，$k$ 为万有引力常数.

$V_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 63 \times 10^5} \approx 11.2 \times 10^3$（米/秒）.

第二宇宙速度指的就是 $V_0 = 11.2$ 公里/秒这个速度.

习题 4.3 第 182 页 1（3）、（3）、（5），2（1），4，5，7