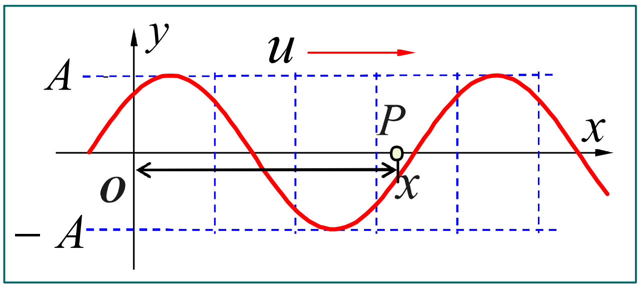
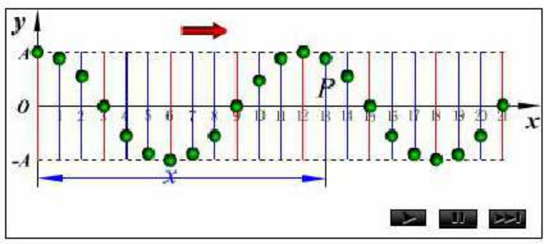
一 平面简谐波的波函数

设有一平面简谐波沿x轴正方向传播，波速为u，坐标原点O处质点的振动方程为

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

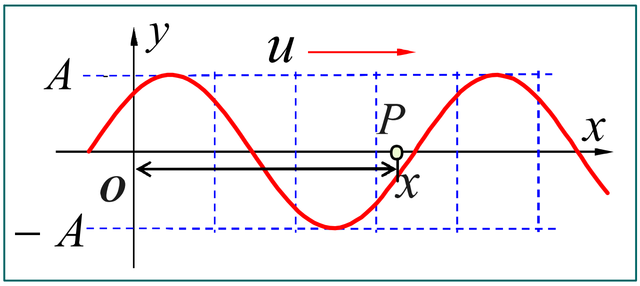




$$y_O = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

y_O表示质点O在t时刻离开平衡位置的距离.

考察波线上P点(坐标x), P点比O点的振动落后$\Delta t = \frac{x}{u}$, P点在t时刻的位移是O点在$t-\Delta t$时刻的位移，由此得



$$y_P = y_O(t-\Delta t) = A\cos\left[\omega\left(t-\Delta t\right)+\varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

由于P为波传播方向上任一点，因此上述方程能描述波传播方向上任一点的振动，具有一般意义，即为沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波函数，又称波动方程.

利用 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi v$ 和 $\lambda = uT$

可得波动方程的几种不同形式：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right]$$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

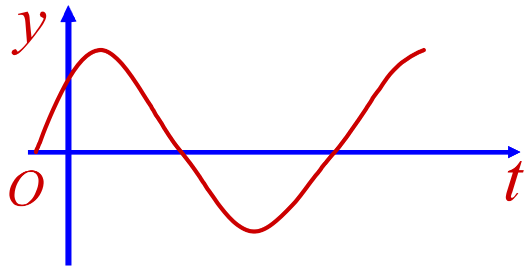
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

二　波函数的物理含义

1　x一定，t变化　$y = A\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$

令 $\varphi' = -\dfrac{2\pi}{\lambda}x + \varphi$

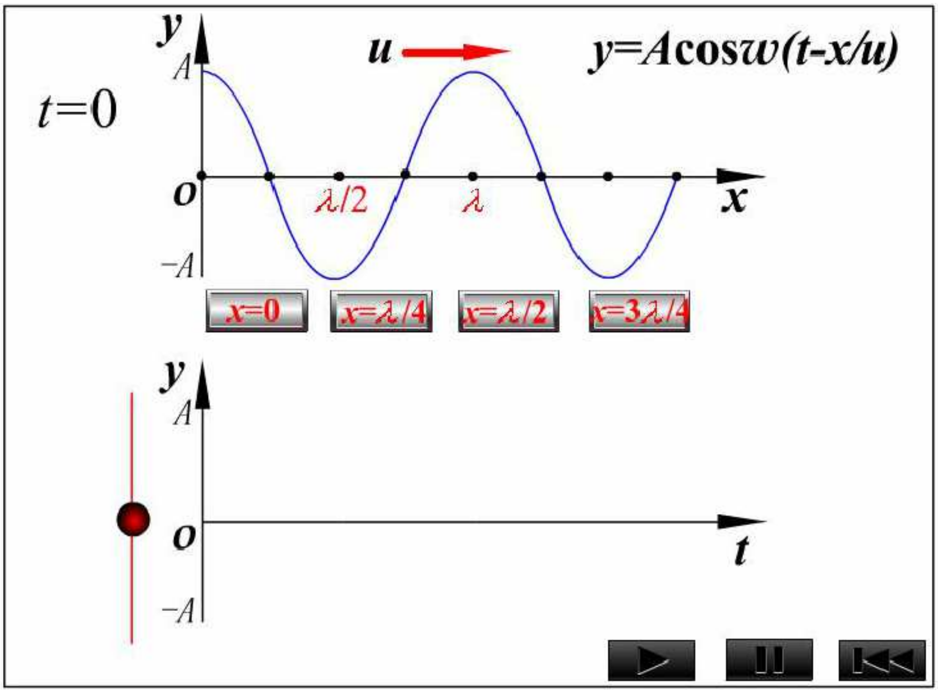
则 $y = A\cos(\omega t + \varphi')$



表示x点处质点的振动方程（y—t的关系）

$y(x,t) = y(x,t+T)$（波具有时间的周期性）

波线上各点的简谐运动图

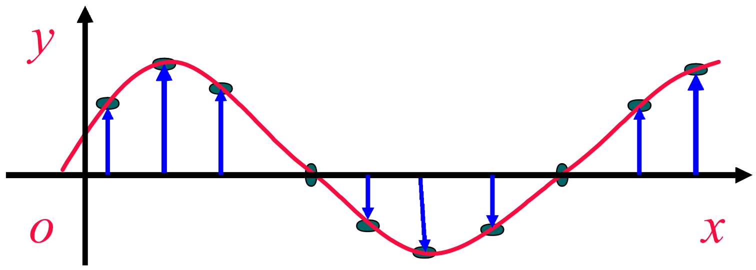


2 t一定 x变化 $y=A\cos\left(\omega t-\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right)$

令 $\varphi''=\omega t+\varphi=C$（定值）

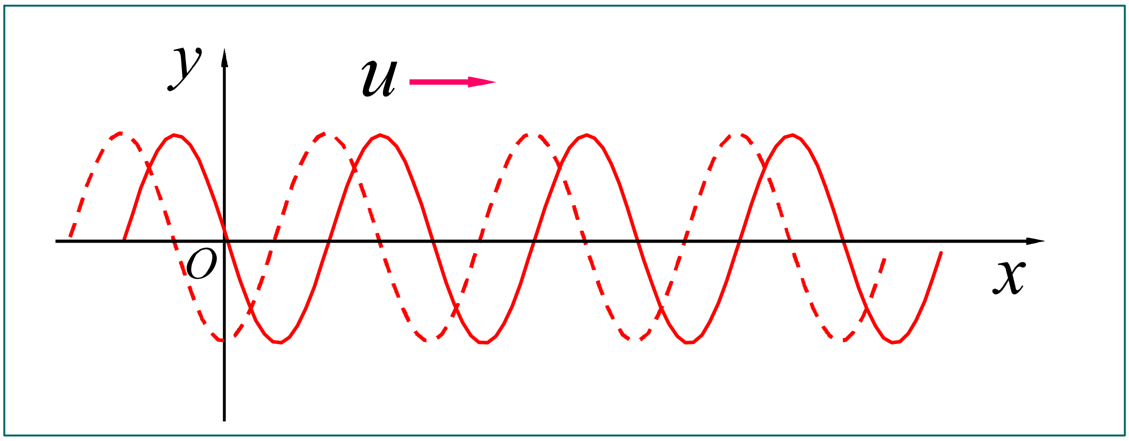
则 $y=A\cos\left[-\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\varphi''\right]$

该方程表示t时刻波传播方向上各质点的位移，即t时刻的波形（y—x的关系）



3 x、t 都变

方程表示在不同时刻各质点的位移，即不同时刻的波形，体现了波的传播.

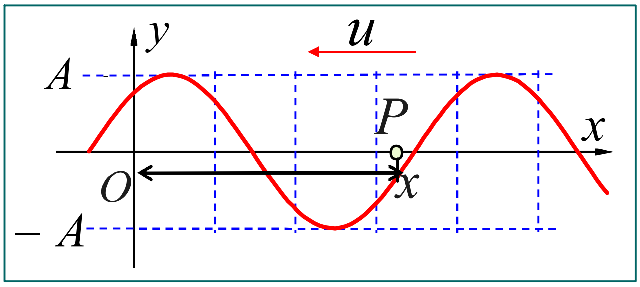


4 沿 $-x$ 轴方向传播的波动方程

如图，设 O 点振动方程为

$$y_O = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

P 点振动比O点超前了 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$



故P点的振动方程（波动方程）为：

$$y = y_o(t+\Delta t) = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

对波动方程的各种形式，应着重从物理意义上去理解和把握.

从实质上看：波动是振动的传播.

从形式上看：波动是波形的传播.

例1 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0\ \mathrm{m}$, $T=2.0\ \mathrm{s}$, $\lambda=2.0\ \mathrm{m}$. 在 $t=0$ 时坐标原点处的质点在平衡位置沿 Oy 轴正向运动．求：(1) 波动方程；(2) $t=1.0\ \mathrm{s}$ 波形图；(3) $x=0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动规律并作图.

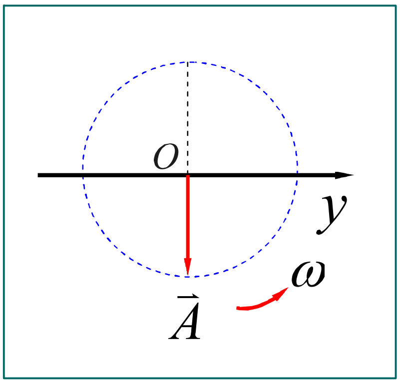
解 (1) 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \boxed{\varphi}]$$

$$t = 0 \quad x = 0$$

$$y = 0, v = \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \quad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$



$$y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]\,(\mathrm{m})$$

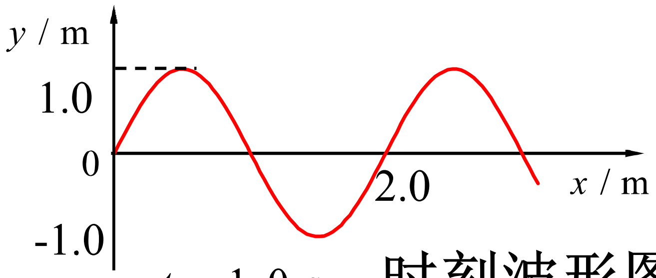
(2) 求 $t=1.0\mathrm{s}$ 波形图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y=1.0\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]$$

$$=\sin\pi x\ \ (\mathrm{m})$$

$t=1.0\ \mathrm{s}$
波形方程



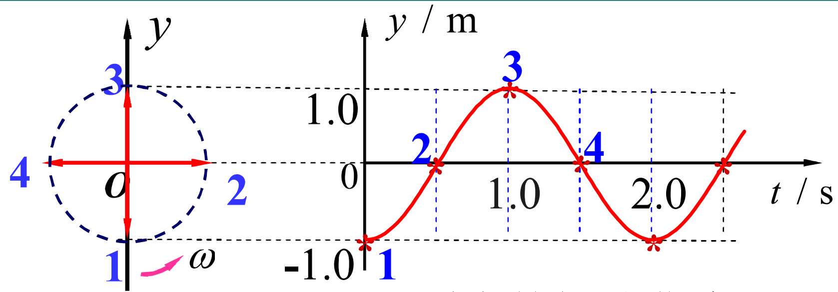
$t=1.0\ \mathrm{s}$ 时刻波形图

(3) $x = 0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动规律并作图

$$y = 1.0\cos[2\,\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$$

$x = 0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动方程

$$y = \cos[\pi t - \pi]\ (\mathrm{m})$$



$x = 0.5$ m 处质点的振动曲线

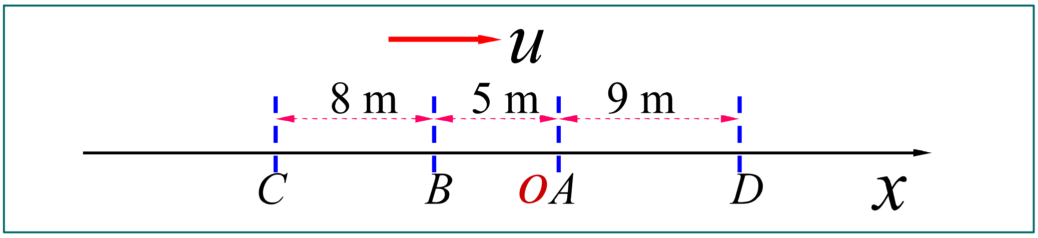
例2 一平面简谐波以速度 $u = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 沿直线传播，波线上点 A 的简谐运动方 程 $y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$; ($y$, t 单位分别为m，s).

求:(1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程;

(2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程;

(3) 求传播方向上点 C、D 的简谐运动方程;

(4) 分别求出 BC，CD 两点间的相位差.



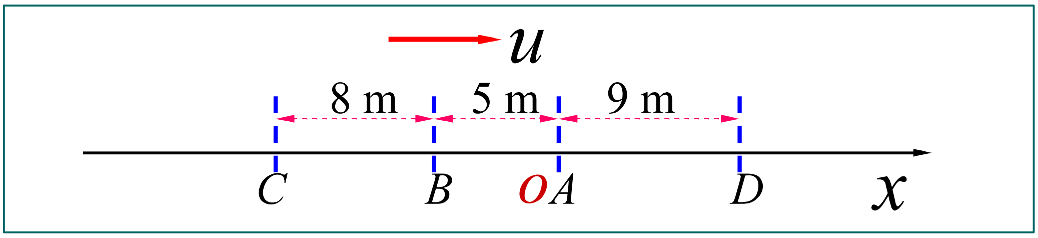
(1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程

$$A = 3\times10^{-2}\ \mathrm{m} \quad T = 0.5\ \mathrm{s} \quad \varphi = 0$$

$$\lambda = uT = 10\ \mathrm{m}$$

$$y = A\cos[\,2\pi\,(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi\,]$$

$$y = 3\times10^{-2}\cos 2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10})\ (\mathrm{m})$$



(2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程

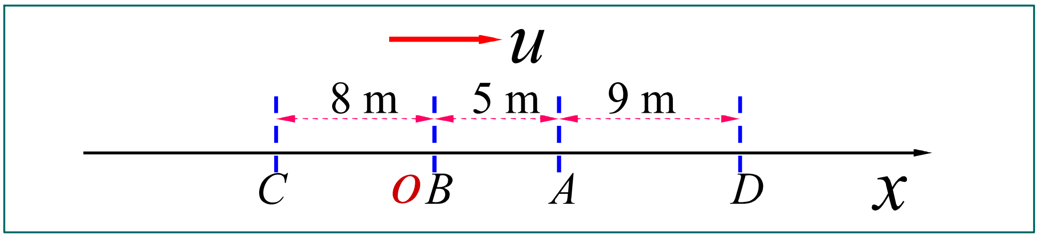
$$y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi\frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi\frac{-5}{10} = \pi$$

$$\varphi_B = \pi$$

$$y_B = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \pi)$$

$$y = 3\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10}) + \pi]\ (\mathrm{m})$$

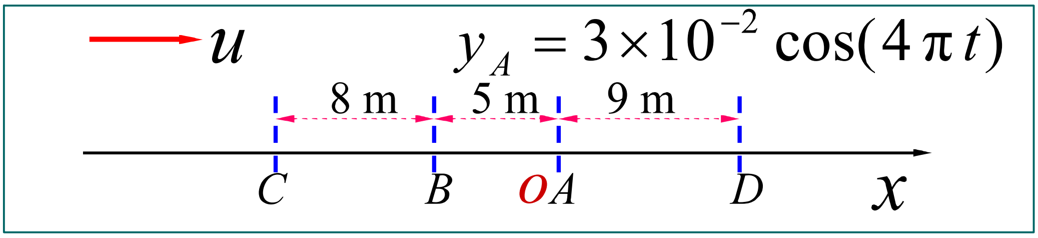


（3）写出传播方向上点C、D的运动方程

点C 的相位比点A 超前

$$y_C = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + 2\pi\frac{AC}{\lambda})$$

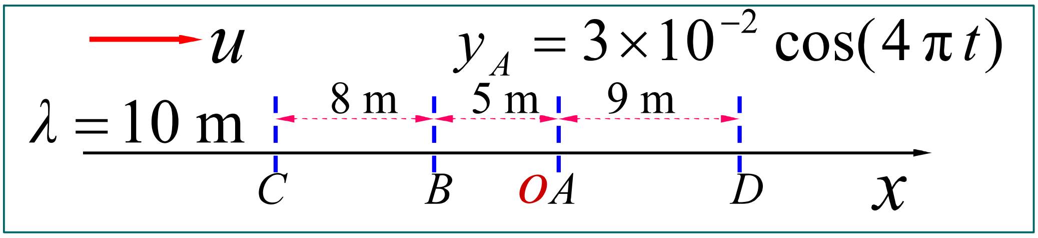
$$= 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \frac{13}{5}\pi)\ \text{(m)}$$



点 D 的相位落后于点 A

$$y_D = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - 2\pi\frac{AD}{\lambda})$$

$$= 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - \frac{9}{5}\pi)\ (\mathrm{m})$$

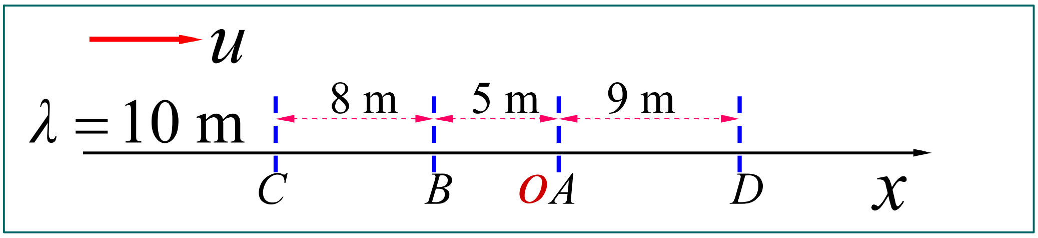


(4) 分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$



选择进入下一节：

END