

力的空间累积效应  $\Rightarrow$  力的功, 动能, 动能定理.

力矩的空间累积效应  $\Rightarrow$  力矩的功, 转动动能, 动能定理.

### 一 力矩做功

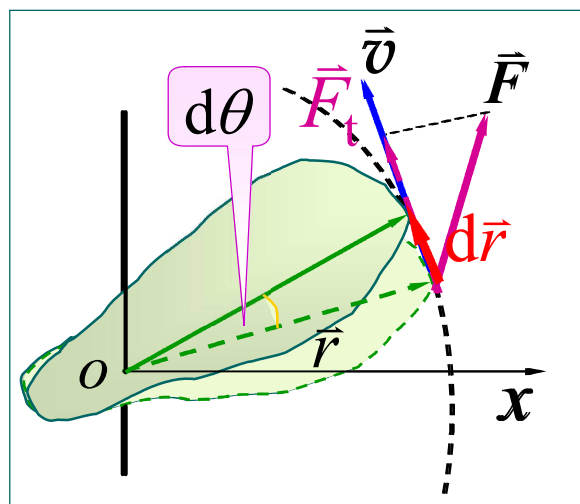
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t ds$$

$$= F_t r d\theta$$

$$dW = M d\theta$$

力矩的功

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$



### 二 力矩的功率

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$



### 三 转动动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

### 四 刚体绕定轴转动的动能定理

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega$$

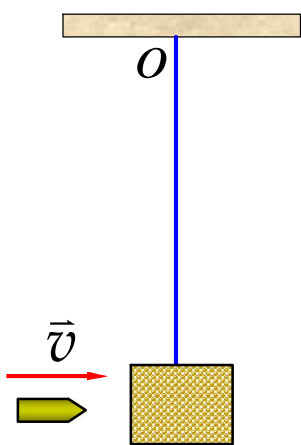
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

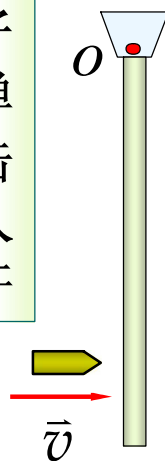


## 讨论

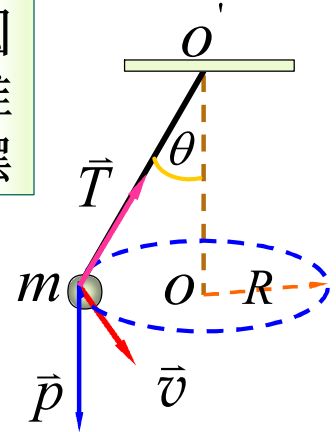
子弹击入沙袋



子弹击入杆



圆锥摆



以子弹和沙袋为系统

动量守恒;

角动量守恒;

机械能不守恒.

以子弹和杆为系统

动量不守恒;

角动量守恒;

机械能不守恒.

圆锥摆系统

动量不守恒;

角动量守恒;

机械能守恒.



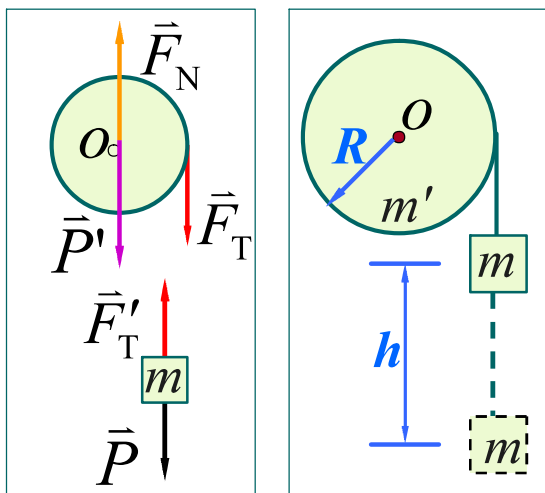
**例1** 一质量为  $m'$ 、半径为  $R$  的圆盘，可绕一垂直通过盘心的无摩擦的水平轴转动。圆盘上绕有轻绳，一端挂质量为  $m$  的物体。问物体在静止下落高度  $h$  时，其速度的大小为多少？设绳的质量忽略不计。

**解** 拉力  $\vec{F}_T$  对圆盘做功，由刚体绕定轴转动的动能定理可得，拉力  $\vec{F}_T$  的力矩所作的功为

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_T R d\theta = R \int_{\theta_0}^{\theta} F_T d\theta$$

$$= \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

$\theta, \theta_0$  和  $\omega, \omega_0$  分别为圆盘终了和起始时的角坐标和角速度。



$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_T R d\theta = R \int_{\theta_0}^{\theta} F_T d\theta = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

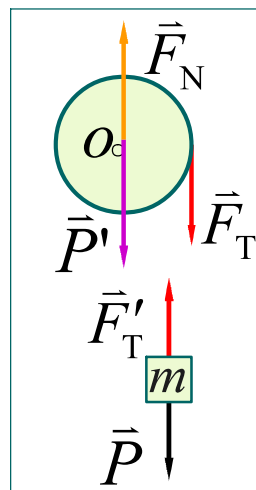
由质点动能定理

$$\vec{F}_T = -\vec{F}'_T$$

$$mgh - R \int_{\theta_0}^{\theta} F_T d\theta = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

物体由静止开始下落  $v_0 = 0, \omega_0 = 0$

并考虑到圆盘的转动惯量  $J = \frac{1}{2} m' R^2$   $v = \omega R$



解得

$$v = 2 \sqrt{\frac{mgh}{m' + 2m}} = \sqrt{\frac{m}{(m'/2) + m}} 2gh$$

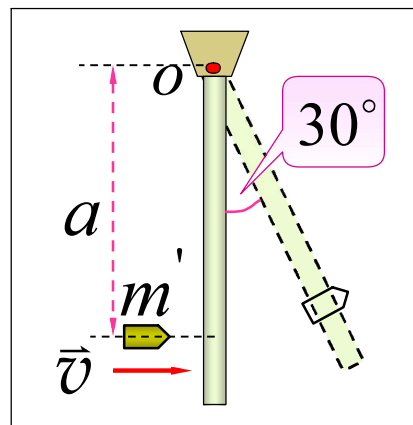


**例2** 一长为  $l$ ，质量为  $m'$  的竿可绕支点  $O$  自由转动。一质量为  $m$ 、速率为  $v$  的子弹射入竿内距支点为  $a$  处，使竿的偏转角为  $30^\circ$ 。问子弹的初速率为多少？

**解** 把子弹和竿看作一个系统。子弹射入竿的过程系统角动量守恒

$$mva = \left(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$



$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$

射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m'l^2 + ma^2 \right) \omega^2 =$$

$$mga(1 - \cos 30^\circ) + m'g \frac{l}{2} (1 - \cos 30^\circ)$$

$$v = \sqrt{g(2 - \sqrt{3})(m'l + 2ma)(m'l^2 + 3ma^2) / 6} / ma$$

