解题的基本思路

1）确定研究对象进行受力分析；

（隔离物体，画受力图）

2）取坐标系；

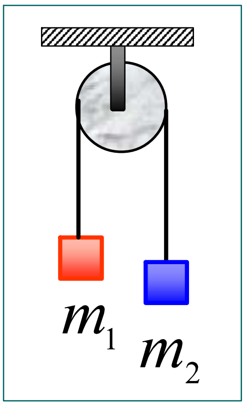
3）列方程（一般用分量式）；

4）利用其它的约束条件列补充方程；

5）先用文字符号求解，后带入数据计算结果.

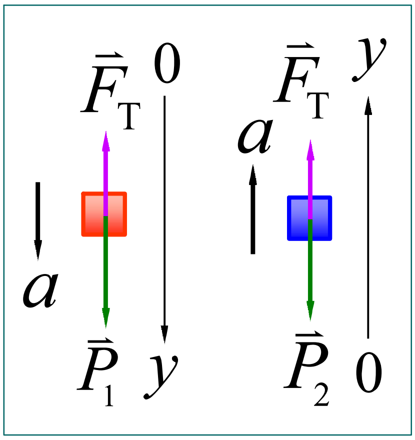
例1 阿特伍德机

（1）如图所示滑轮和绳子的质量均不计，滑轮与绳间的摩擦力以及滑轮与轴间的摩擦力均不计. 且 $m_1 > m_2$. 求重物释放后，物体的加速度和绳的张力.



解 以地面为参考系

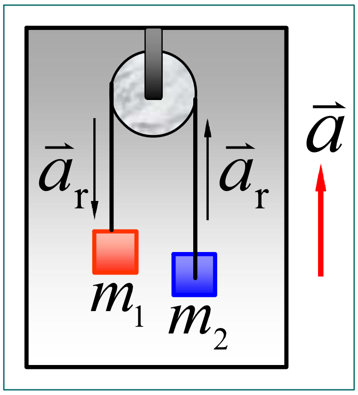
画受力图、选取坐标如图



$$\begin{cases} m_1 g - F_T = m_1 a \\ -m_2 g + F_T = m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

（2）若将此装置置于电梯顶部，当电梯以加速度 $\vec{a}$ 相对地面向上运动时，求两物体相对电梯的加速度和绳的张力.

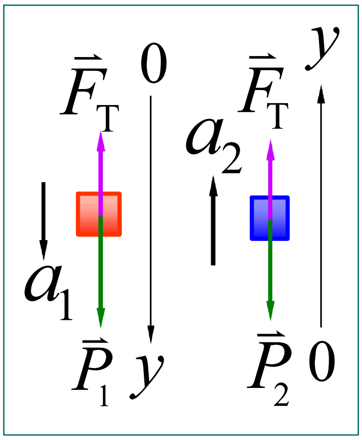


解：以地面为参考系

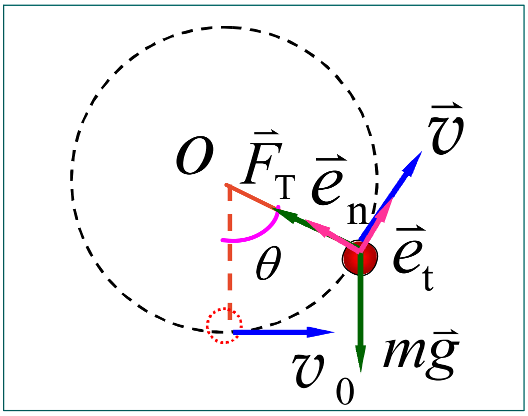
设两物体相对于地面的加速度分别为 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$，且相对电梯的加速度为 $\vec{a}_r$

$$\begin{cases} m_1 g - F_T = m_1 a_1 \\ a_1 = a_r - a \\ -m_2 g + F_T = m_2 a_2 \\ a_2 = a_r + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \\ F_T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \end{cases}$$



例2 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 o， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$ ，求小球在任意位置的速率及绳的张力.



解
$$\begin{cases} F_T - mg\cos\theta = ma_n \\ -mg\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

$$F_T - mg\cos\theta = mv^2/l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

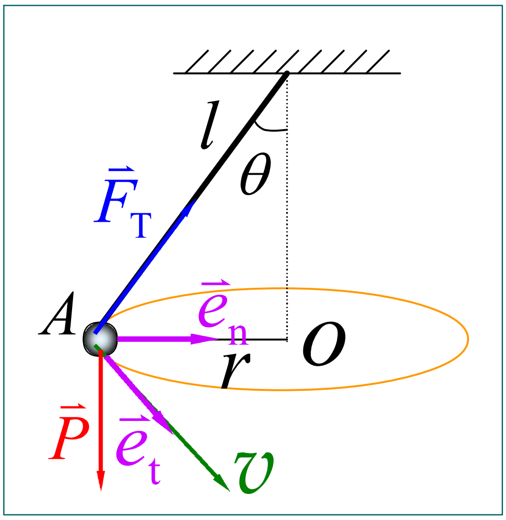
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{l}\frac{dv}{d\theta}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gl\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

$$F_T = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

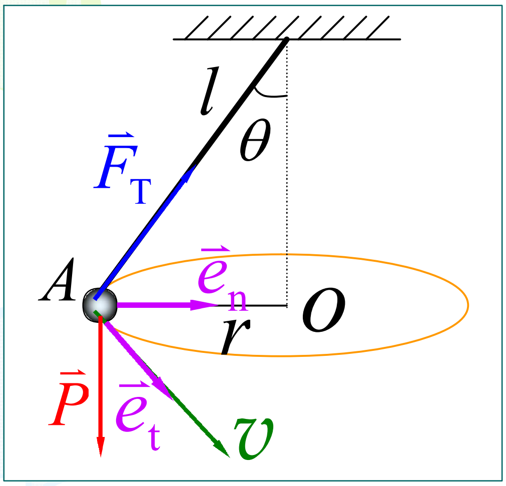
例3 如图所示（圆锥摆），长为 l 的细绳一端固定在天花板上，另一端悬挂质量为 m 的小球，小球经推动后，在水平面内绕通过圆心 O 的铅直轴作角速度为 ω 的匀速率圆周运动．问绳和铅直方向所成的角度 θ 为多少？空气阻力不计．

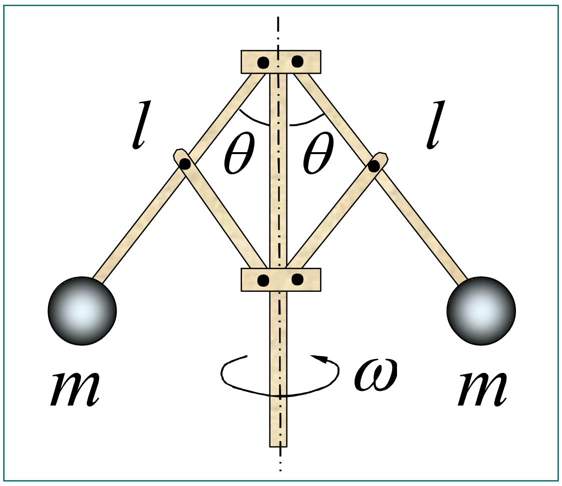


解 $$\vec{F}_{\mathrm{T}}+\vec{P}=m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T}}\sin\theta = ma_{\mathrm{n}} = m\dfrac{v^2}{r} = mr\omega^2 \\ F_{\mathrm{T}}\cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

$$r = l\sin\theta$$





$$F_T\cos\theta = P \qquad F_T = m\omega^2 l \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}$$

ω越大，θ也越大

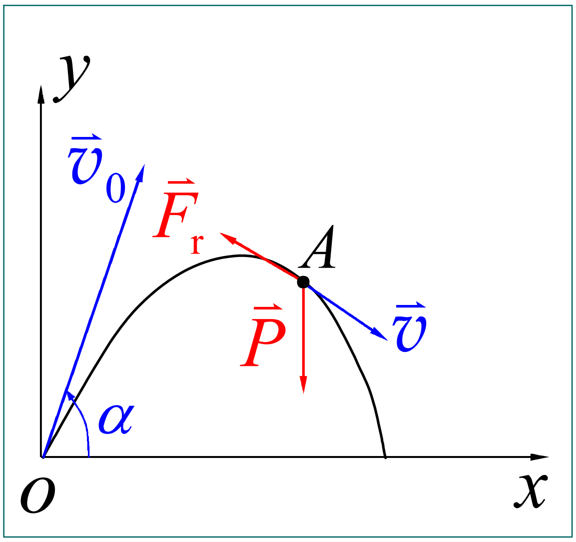
利用此原理，可制成蒸汽机的调速器（如图所示）.

例4 设空气对抛体的阻力与抛体的速度成正比，即 $\vec{F}_\mathrm{r} = -k\vec{v}$，$k$ 为比例系数．抛体的质量为 m，初速为 $\vec{v}_0$、抛射角为 α．求抛体运动的轨迹方程．

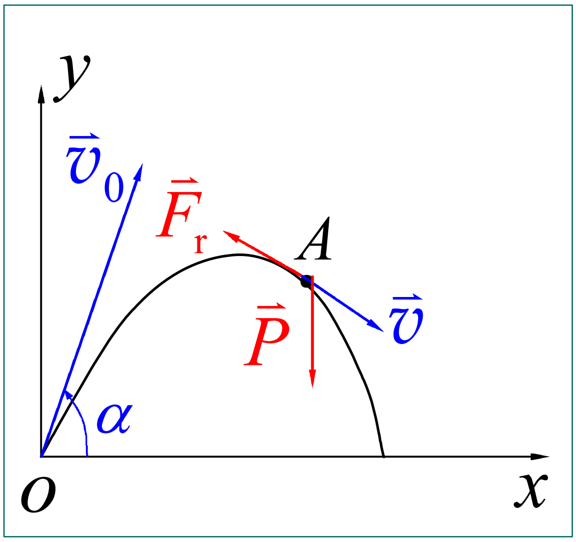
解 取如图所示的 Oxy 平面坐标系

$$
\begin{cases}
ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kv_x \\
ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - kv_y
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \\
\dfrac{k\mathrm{d}v_y}{mg + kv_y} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t
\end{cases}
$$



$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \\ \dfrac{k\mathrm{d}v_y}{mg+kv_y} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \end{cases}$$

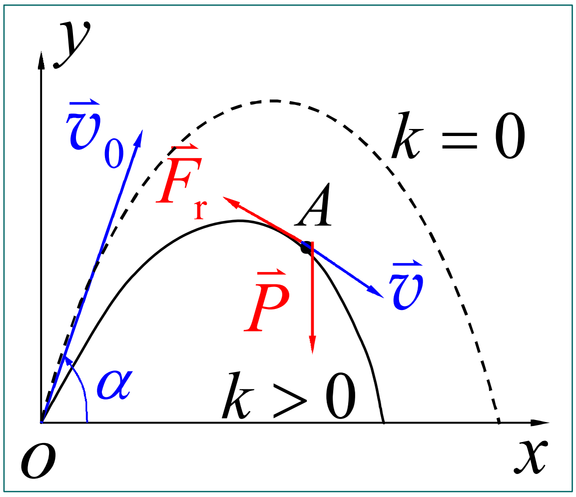


$$t = 0$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-kt/m} \\ v_y = (v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k})\mathrm{e}^{-kt/m} - \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-kt/m} \\ v_y = (v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k})\mathrm{e}^{-kt/m} - \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$



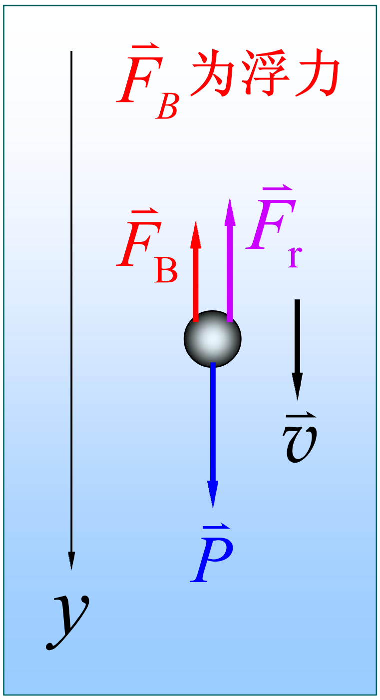
$$\mathrm{d}x = v_x \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}y = v_y \mathrm{d}t$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{k}(v_0 \cos\alpha)(1-\mathrm{e}^{-kt/m}) \\ y = \dfrac{m}{k}(v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k})(1-\mathrm{e}^{-kt/m}) - \dfrac{mg}{k}t \end{cases}$$

$$y = (\tan\alpha + \frac{mg}{kv_0\cos\alpha})x + \frac{m^2 g}{k^2}\ln(1-\frac{k}{mv_0\cos\alpha}x)$$

例5 一质量m，半径r 的球体在水中静止释放沉入水底. 已知阻力 $F_r = -6\pi r\eta v$，η为粘滞系数，求 $v(t)$.

解 取坐标如图



$$mg - F_B - 6\pi\eta r v = ma$$

令 $F_0 = mg - F_B \qquad b = 6\pi\eta r$

$$F_0 - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}(v - \frac{F_0}{b})$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v-(F_0/b)} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

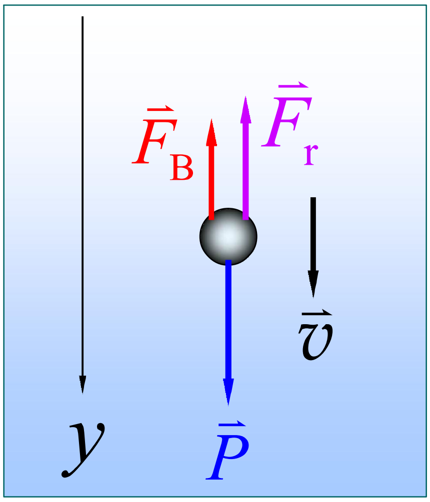
$$v = \frac{F_0}{b}\left[1-\mathrm{e}^{-(b/m)t}\right]$$

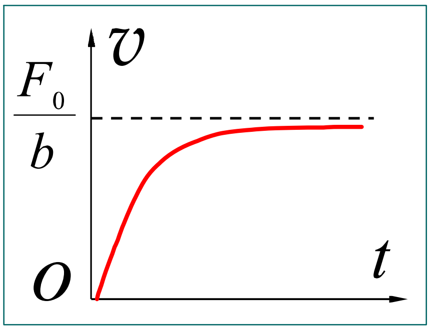
$t \to \infty$, $v_{\mathrm{L}} \to F_0/b$（极限速度）

当 $t = 3m/b$ 时

$$v = v_{\mathrm{L}}(1-0.05) = 0.95v_{\mathrm{L}}$$

一般认为 $t \geq 3m/b$, $v \to v_{\mathrm{L}}$





若球体在水面上是具有竖直向下的速率 v_0 ，且在水中的重力与浮力相等，即 $F_B = P$．则球体在水中仅受阻力 $F_r = -bv$ 的作用

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-(b/m)t}$$