

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
卫生部“十二五”规划教材
全国高等医药教材建设研究会“十二五”规划教材

全国高等学校教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

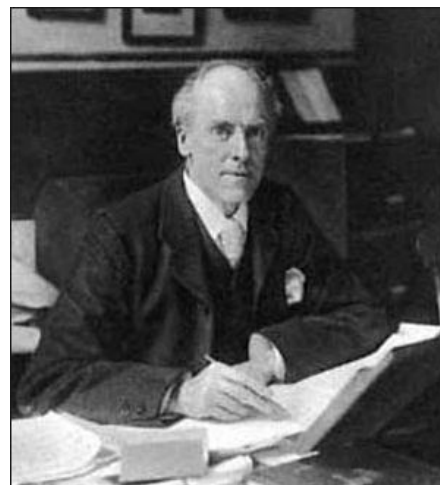
医学统计学

第九章 χ^2 检验



- ▶ χ^2 检验 (chi-square test): 英国统计学家Pearson提出的一种主要用于分析分类变量数据的假设检验方法，是一种用于分析分类变量数据的假设检验方法，该方法主要用途是推断两个或多个总体率及构成比之间有无差别。

Karl Pearson



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

第一节 四格表资料的 χ^2 检验

- ▶ **例9-1** 吲达帕胺片治疗原发性高血压疗效，将患者随机分为两组，试验组用吲达帕胺片加辅助治疗，对照组用安慰剂加辅助治疗。试分析有效性。

表9-1 两种疗法治疗原发性高血压的疗效

组别	有效	无效	合计	有效率 (%)
对照组	20(25.8) <i>a</i>	24(18.2) <i>b</i>	44(<i>a+b</i>)	45.5
试验组	21(15.2) <i>c</i>	5(10.8) <i>d</i>	26(<i>c+d</i>)	80.8
合计	41(<i>a+c</i>)	29(<i>b+d</i>)	70(<i>n</i>)	58.6



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

一、 χ^2 检验的通用公式

▶ 通用公式:

$$\chi^2 = \sum \frac{(A-T)^2}{T} \quad \nu = (\text{行数}-1)(\text{列数}-1)$$

式中, A 为实际频数, T 为理论频数, ν 为自由度。

▶ 理论频数计算公式

$$T_{ij} = \frac{n_{i \cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$$

式中 T_{ij} 为第 i 行第 j 列的理论频数, $n_{i \cdot}$ 和 $n_{\cdot j}$ 分别为相应行与列的周边合计数, n 为总例数。



检验步骤:

1. 建立检验假设并确定检验水准

$H_0 : \pi_1 = \pi_2$ 即试验组与对照组的总体有效率相等

$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$ 即试验组与对照组的总体有效率不等

$$\alpha = 0.05$$



2. 计算检验统计量

按公式计算 T_{11} ，然后利用四格表的各行列的合计数计算 T_{12} 、 T_{21} 和 T_{22} ，即

$$T_{11} = (44 \times 41) / 70 = 25.77, \quad T_{12} = 44 - 25.77 = 18.23$$

$$T_{21} = 41 - 25.77 = 15.23, \quad T_{22} = 26 - 15.23 = 10.77$$

按公式(9-1)计算 χ^2 值

$$\chi^2 = \frac{(20 - 25.77)^2}{25.77} + \frac{(24 - 18.23)^2}{18.23} + \frac{(21 - 15.23)^2}{15.23} + \frac{(5 - 10.77)^2}{10.77} = 8.40$$

$$\nu = (2 - 1) \times (2 - 1) = 1$$



3. 确定 P 值，作出推断结论

查 χ^2 界值表，得 $\chi_{0.05,1}^2 = 3.84$ ，按 $\alpha = 0.05$ 水准，拒绝 H_0 ，接受 H_1 ， $P < 0.005$ ，可以认为两组治疗原发性高血压的总体有效率不同，即可认为吲达帕胺片治疗原发性高血压是有效的。



二、四格表资料 χ^2 检验的专用公式

▶ 专用公式:

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc)^2 n}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$$\chi^2 = \frac{(20 \times 5 - 24 \times 21)^2 \times 70}{44 \times 26 \times 41 \times 29} = 8.40$$

结论同前。



三、四格表资料 χ^2 检验的校正公式

▶ 校正公式:

$$\chi_c^2 = \sum \frac{(|A - T| - 0.5)^2}{T}$$

$$\chi_c^2 = \frac{(|ad - bc| - n/2)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Frank Yates



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

▶ 对于四格表资料，通常规定为：

1. 当 $n \geq 40$ 且所有的 $T \geq 5$ 时，用 χ^2 检验的基本公式或四格表资料 χ^2 检验的专用公式；
2. 当 $n \geq 40$ ，但有 $1 \leq T < 5$ ，用四格表资料 χ^2 检验的校正公式；
3. 当 $n < 40$ 或 $T < 1$ 时，用四格表资料的Fisher确切概率法。



例9-2 某医师欲比较胞磷胆碱与神经节苷酯治疗脑血管疾病的疗效，将58例脑血管病患者随机分为两组，结果见表。问两种药物治疗脑血管疾病的效率是否相等？

表9-2 两种药物治疗脑血管疾病有效率的比较

药物分组	有效	无效	合计	有效率 (%)
胞磷胆碱组	25 (23.7)	3 (4.3)	28	89.29
神经节苷酯组	24 (25.3)	6 (4.7)	30	80.00
合计	49	9	58	84.48



1. 建立假设，设定检验水准

$H_0: \pi_1 = \pi_2$ 即两种药物治疗脑血管疾病的有效率相等

$H_1: \pi_1 \neq \pi_2$ 即两种药物治疗脑血管疾病的有效率不相等

$$\alpha = 0.05$$

2. 计算检验统计量

$$\chi_c^2 = \frac{(|6 \times 25 - 3 \times 24| - 58/2)^2 \times 58}{49 \times 9 \times 28 \times 30} = 0.376 \quad \nu = (2-1)(2-1) = 1$$

3. 确定 P 值，作出推断结论

不拒绝 H_0 ，尚不能认为两种药物治疗脑血管疾病的有效率不相等



四、四格表资料的Fisher确切概率法

- ▶ 当四格表资料中出现 $n < 40$ 或 $T < 1$ ，需改用四格表资料的Fisher确切概率法。该法是一种直接计算概率的假设检验方法，其理论依据是超几何分布（hypergeometric distribution）。四格表的确切概率法不属于检验的范畴，但常作为四格表资料假设检验的补充。



- ▶ 确切概率计算法的基本思想是：在四格表边缘合计固定不变的条件下，利用公式直接计算表内四个格子数据的各种组合的概率 P_i ，然后计算单侧或双侧累计概率 P ，并与检验水准比较，作出是否拒绝 H_0 的结论。



- ▶ **例9-3** 某研究者为研究乙肝免疫球蛋白预防白兔胎儿宫内感染HBV的效果，将17例HBsAg阳性白兔随机分为预防注射组和非预防组，观察两组所产出的新生白兔HBV感染情况，结果见表9-3。问两组新生白兔的HBV总体感染率有无差别？

表9-3 两组新生儿HBV感染率的比较

组别	例数	阳性	阴性	感染率(%)
预防注射组	9	2	7	22.22
非预防组	8	6	2	75.00
合计	17	8	9	51.47



1. 建立检验假设并确定检验水准

$H_0: \pi_1 = \pi_2$, 即两组新生白兔HBV的总体感染率相等

$H_1: \pi_1 \neq \pi_2$, 即两组新生白兔HBV的总体感染率不相等

$$\alpha = 0.05$$

2. 计算概率

根据公式计算各种组合的四格表概率, 结果见表9-4。例如实际观察到的四格表资料的概率为

$$P^* = \frac{9!8!8!9!}{7!2!2!6!17!} = 0.041464$$



表9-4 各种组合的四格表计算的概率

四格表序号	阳性	阴性	$a-T_a$	P
1	8 0	1 8	-3.76	0.000370
2	7 1	2 7	-2.76	0.011847
3	6 2	3 6	-1.76	0.096750
4	5 3	4 5	-0.76	0.290251
5	4 4	5 4	0.24	0.362814
6	3 5	6 3	1.24	0.193501
7*	2 6	7 2	2.24*	0.041464*
8	1 7	8 1	3.24	0.002962
9	0 8	9 0	4.24	0.000041

* 为实际数据的四格表



人民卫生出版社
PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

3. 双侧累计概率 P 值为

$$\begin{aligned} P &= P(1) + P(2) + P(7) + P(8) + P(9) \\ &= 0.000370 + 0.011847 + 0.041464 + 0.002962 + \\ &\quad 0.000041 = 0.057 \end{aligned}$$

所得 P 值，在 $\alpha = 0.05$ 检验水准下，不拒绝 H_0 ，还不能认为预防注射组与非预防组的新生白兔 HBV 的总体感染率不等。



第二节 配对四个表资料的 χ^2 检验

▶基本公式:

$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}, \nu = 1; (b+c) \geq 40$$

▶校正公式:

$$\chi_c^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}, \nu = 1; (b+c) < 40$$



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

- ▶ **例9-4** 现有198份痰标本，每份标本分别用A、B两种培养基培养结核菌，问A、B两种培养基的阳性培养率是否不等？

表9-5 A、B两种培养基的培养结果

A培养基	B培养基		合计
	+	-	
+	48 (a)	24 (b)	72
-	20 (c)	106 (d)	126
合计	68	130	198



1. 建立检验假设并确定检验水准

$H_0 : \mathbf{B}=\mathbf{C}$ ，即两种培养基的阳性培养率相等

$H_1 : \mathbf{B}\neq\mathbf{C}$ ，即两种培养基的阳性培养率不相等

$\alpha = 0.05$

2. 计算检验统计量

本例 $b+c>40$ ，用非校正公式计算得

$$\chi^2 = \frac{(24 - 20)^2}{24 + 20} = 0.36, \quad \nu = 1$$

3. 确定P值，作出推断结论

$P > 0.05$ ，不拒绝 H_0 ，尚不能认为两种培养基的阳性培养率不同



第三节 行×列表资料 χ^2 检验

一、 $R \times C$ 表 χ^2 检验的专用公式

- ▶ 主要用于具有 R 行和 C 列的列联表资料的检验，用于多个样本率或多个构成比的比较，其计算公式

$$\chi^2 = n \left(\sum \frac{A^2}{n_R n_C} - 1 \right), \nu = (\text{行数} - 1)(\text{列数} - 1)$$



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

- ▶ **例9-5** 某医院用3种方案治疗急性肝炎254例，观察结果如下，问3种方案治疗急性肝炎的有效率是否不同。

表9-6 3种方案治疗急性肝炎的效果

组别	有效	无效	合计	有效率 (%)
西药组	51	49	100	51.00
中药组	35	45	80	43.75
中西药结合组	59	15	74	79.73
合计	145	109	254	57.09



1. 建立检验假设并确定检验水准

$H_0: \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ 即3种治疗方案的有效率相等

$H_1: 3$ 种治疗方案的有效率不全相等

$$\alpha = 0.05$$

2. 计算检验统计量，按公式（9-10）计算 值：

$$\begin{aligned}\chi^2 &= 254 \times \left(\frac{51^2}{100 \times 145} + \frac{49^2}{100 \times 109} + \frac{35^2}{80 \times 145} + \frac{45^2}{80 \times 109} + \frac{59^2}{74 \times 145} + \frac{15^2}{74 \times 109} - 1 \right) \\ &= 254 \times (0.1794 + 0.2203 + 0.1056 + 0.2322 + 0.3244 + 0.0279 - 1) \\ &= 22.81\end{aligned}$$

$$\nu = (3 - 1)(2 - 1) = 2$$



3. 确定 P 值，作出推断结论

查界值表得 $P < 0.05$ ，在 $\alpha=0.05$ 的检验水准下，拒绝 H_0 ，接受 H_1 ，可以认为三种疗法的有效率有差别。



例9-6 某研究人员收集了亚洲、欧洲和北美洲人的A、B、AB、O血型资料，结果见表9-7，问不同地区人群ABO血型分类构成比是否不同。

表9-7 三个不同地区血型样本的频分布

地区	A	B	AB	O	合计
亚洲	321	369	95	295	1080
欧洲	258	43	22	194	517
北美洲	408	106	37	444	995
合计	987	518	154	933	2592



1. 建立检验假设并确定检验水准

H_0 : 不同地区人群血型分布总体构成比相同

H_1 : 不同地区人群血型分布总体构成比不相同

$$\alpha = 0.05$$

2. 计算检验统计量

$$\chi^2 = 2592 \left(\frac{321^2}{987 \times 1080} + \frac{369^2}{518 \times 1080} + \dots + \frac{444^2}{933 \times 955} - 1 \right) = 297.38$$

$$\nu = (3-1)(4-1) = 6$$

3. 确定 P 值, 作出推断结论

查 χ^2 界值表得 $P < 0.05$, 认为三个不同地区的人群血型分布总体构成比有差别。



二、多个样本率间多重比较

1. 多个实验组间的两两比较

分析目的为 k 个实验组间，任两个率均进行比较，检验水准 α' 可用下式估计：

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\binom{k}{2}}$$

式中 $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ ， k 为样本率的个数



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

二、多个样本率间多重比较

▶ 实验组与同一个对照组的比较

分析目的为各实验组与同一个对照组比较，而各实验组间不需要比较。检验水准 α' 可用下式估计：

$$\alpha' = \frac{\alpha}{k-1}$$

式中 k 为样本率的个数。



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

▶ **例9-7** 对例9-5中表9-6的资料进行两两比较，以推断是否任两种疗法治疗急性无黄疸型病毒肝炎的有效率均有差别？

本研究目的为三个实验组间的两两比较，检验水准 $\alpha = 0.05$ 用公式估计得

$$\alpha' = \frac{0.05}{3(3-1)/2} = \frac{0.05}{3} = 0.0166$$



1. 建立检验假设并确定检验水准

$H_0: \pi_A = \pi_B$ ，即任两组的总体有效率相等

$H_1: \pi_A \neq \pi_B$ ，至少两组的总体有效率不相等

$$\alpha = 0.05$$

2. 计算检验统计量

本研究的目的是为三个实验组间的两两比较，两两比较的 2×2 表及用公式(9-4)分别计算任两对比组的检验统计量值结果见表9-9。



3. 确定 P 值, 作出推断结论 ($\alpha = 0.0166$)

表9-9 3种疗法有效率的两两比较

对比组	有效	无效	合计		P
西药组	51	49	100	0.94 < 5.73	> 0.0166
中药组	35	45	80		
合计	86	94	180		
中药组	35	45	80	20.93 > 5.73	< 0.0166
中西药结合组	59	15	74		
合计	94	60	154		
西药组	51	49	100	15.10 > 5.73	< 0.0166
中西药结合组	59	15	74		
合计	110	64	174		



三、行×列表资料 χ^2 检验应用注意事项

- ▶ 行×列表资料中各格的理论频数不应小于1，并且 $1 \leq T < 5$ 的格子数不宜超过格子总数的1/5。若出现上述情况，可通过增加样本含量，或根据专业知识考虑列或将理论频数太小的行或列与性质相近的邻行或邻列合并等方式解决。



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

- ▶ 多个样本率比较，若所得统计推断为拒绝 H_0 ，接受 H_1 时，只能认为各总体率之间总的有差别，但不能说明任两个总体率之间均有差别。要进一步推断哪两两总体率之间有差别，需做多个样本率的多重比较。
- ▶ 行×列表资料卡方检验与分类变量的顺序无关，对于有序的 $R \times C$ 表资料不宜用卡方检验。单向有序表资料，宜选用秩转换的非参数检验；分析两个有序分类变量间是否存在相关关系，宜用等级相关分析。



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

小结

1. χ^2 检验是用于分析分类变量数据的假设检验方法，该方法主要目的是推断两个或多个总体率或构成比之间有无差别。其基本公式为

$$\chi^2 = \sum \frac{(A-T)^2}{T}$$

2. 针对不同的数据有 χ^2 四格表专用公式、四个表校正公式和 $R \times C$ 列联表通用公式，在应用过程中需要根据不同的数据形势选择合适的方法。



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

3.当多个样本率比较的推断结论拒绝 H_0 ，只说明各总体率之间有差别，但不能说明任两个总体率之间有差别。为此，需要采用多个样本率的多重比较方法。

4.多个样本率间多重比较有 χ^2 分割法、可信区间法和Bonferroni方法，应用这些方法能够保证假设检验中I型错误的概率不变。

(杨土保)



人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE