第一节 线性方程组的表示形式

一、代数形式

称

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

或者 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

为线性方程组的代数形式

二、矩阵形式

记 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

那么，线性方程组（**1**）可表示为 $Ax=b$ 称为方程组的矩阵表示形式，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性方程组的系数矩阵,***A***的行数***m***就是方程组中方程的个数，***A***的列数***n***就是方程组中未知数的个数.

三、向量形式

记 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, … , $\alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

即 α_i 是***A***的第***i***列，则方程组（**1**）可写成

$$\boldsymbol{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b}$$

称为方程组的向量形式。

显然以下四种提法是等价的：

1. 方程组（1）有解；

2. b能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示；

3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，与向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b$ 等价；

4. 矩阵A与矩阵B的秩相等，即R（A）=R（B）。

由此得到下面的判定定理。

定理　　线性方程组（1）有解的充要条件是它的系数矩阵**A**的秩等于增广矩阵**B**的秩，即

R（A）=R（B）。

二、齐次线性方程组的有非零解的条件

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

一定有解，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是它的一个解，称为方程组（2）的零解。

方程组（2）可写成向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

对方程组（2），以下几种说法是等价的：

1. 方程组（2）有非零解；

2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关；

3. 系数矩阵A=（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$）的秩小于 n，即R（A）<n.

定理 齐次线性方程组（2）有非零解的充要条件是它的系数矩阵A的秩R（A）<n,其中n为（2）的未知量的个数。

若R（A）= n, 则方程组（2）只有零解。

推论 含有n个方程n个未知量的齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式 $|A| = 0$。