

# 轴向运动简支梁振动响应分析

齐亚峰<sup>1</sup>, 刘 宁<sup>2</sup>, 杨国来<sup>2</sup>

(1. 中国人民解放军 92941 部队, 辽宁 葫芦岛 125000; 2. 南京理工大学, 南京 210094)

**摘要:** 轴向运动系统广泛存在于诸如火炮发射系统、动力传送带、带锯、空中缆车索道等工程领域, 理论上可将其抽象为轴向运动弦线和梁的力学模型, 具有重要理论意义和工程应用价值。基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 建立了移动质量作用下轴向运动简支梁振动方程, 利用 Galerkin 法对方程进行离散, 采用 Newmark- $\beta$  法对方程进行数值求解。计算了移动质量对轴向运动梁动态响应的影响, 结果表明: 相比轴向运动梁的自由振动, 移动质量的作用使轴向运动梁更多的模态被激起; 移动质量速度越小, 频域成分越丰富; 在移动质量作用前半阶段, 梁的振动频率较低, 在后半阶段振动频率较高。

**关键词:** 轴向运动梁; 移动质量; 横向振动; 振动响应

**本文引用格式:** 齐亚峰, 刘宁, 杨国来. 轴向运动简支梁振动响应分析[J]. 兵器装备工程学报, 2016(12):126-129.

**Citation format:** QI Ya-feng, LIU Ning, YANG Guo-lai. Vibration Analysis of Axially Moving Simply-Supported Beam[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2016(12):126-129.

中图分类号: TJ301

文献标识码: A

文章编号: 2096-2304(2016)12-0126-04

## Vibration Analysis of Axially Moving Simply-Supported Beam

QI Ya-feng<sup>1</sup>, LIU Ning<sup>2</sup>, YANG Guo-lai<sup>2</sup>

(1. The No. 92941<sup>st</sup> Troop of PLA, Huludao 125000, China;

2. Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** Axially moving systems are widely used in engineering, such as gun launching system, power transmission band, belt saws, aerial cable tramways, etc. If the bending stiffness is concern, this kind of systems can be modeled as axially moving beams and has important theoretical significance and engineering application value. A partial-differential equation governing the transverse vibration of an axially moving simply supported beam with lumped mass was derived from Euler-Bernoulli beam model. The governing equation was resolved to a set of second order ordinary differential equations using the Galerkin method. Then the equations were calculated based on Newmark- $\beta$  method. The effect of the moving mass on the dynamic response of the axially moving beam was studied. The results show that the lumped mass arouses more vibration modes of the simply supported moving beam than that of free vibration. Further, it is found that the decrease of the moving speed of the mass along the beam increases the frequency components of the beam vibration. In addition, the vibration frequencies of the beam increase when the lumped mass moves toward the end point. The beam vibration frequency is low, and the vibration frequency is higher in the second half of the beam.

**Key words:** axially moving beam; moving mass; transverse vibration; vibration response

收稿日期: 2016-08-05; 修回日期: 2016-09-10

基金项目: 江苏省自然科学基金(BK20140789); 中央高校基本科研业务费专项资金(30915118826)

作者简介: 齐亚峰(1979—), 男, 主要从事舰炮实验技术研究。

由于移动质量作用下梁的振动和轴向运动系统的动态响应在工程上具有重要的研究价值,受到研究人员的广泛关注。移动质量-梁系统常见于重要的工程结构中,如车-桥耦合系统、弹-炮耦合系统及货物-龙门吊耦合系统等;而轴向运动系统在工业上也有广泛的应用,如空中索道、传送带、纸张、带锯及高楼升降机缆绳等,计及抗弯刚度时这类系统可模型化为轴向运动梁。Michaltsos 研究了载荷不同运动速度下桥梁的动力响应<sup>[1]</sup>;李炜明等对移动质量在连续速度变化下的简支梁动力响应进行了研究<sup>[2]</sup>;王颖泽等研究了多个移动质量作用下身管的振动<sup>[3]</sup>;刘宁等研究了移动质量作用下轴向运动悬臂梁振动特性<sup>[4]</sup>;Wu 基于有限元法对移动质量作用下轴向运动梁的动态响应进行了数值模拟<sup>[5]</sup>;陈力群、杨晓东等对轴向运动梁和弦线的振动进行了分析<sup>[6]</sup>;丁虎、陈立群推导了轴向运动梁控制方程的几种不同形式,通过数值方法分析了各方程的差异<sup>[7]</sup>。现有研究很少将移动质量与轴向运动系统结合起来分析,由于生产生活中大部分的轴向运动系统都与移动载荷相互作用,因此研究轴向运动系统需要考虑移动载荷的影响。对于移动质量作用下两端简支轴向运动梁的动态响应研究还未见有报道。

针对上述问题,本研究建立了移动质量作用下轴向运动简支梁的振动方程,采用 Galerkin 截断方法分离时间和空间变量,得到以模态坐标表示的二阶常微分方程组,通过 Newmark- $\beta$  法进行数值求解,研究了移动质量对梁动态响应的影响。

## 1 轴向运动梁横向振动方程

图 1 所示为移动质量(滑块)作用下轴向运动简支梁的示意图,其中  $u$  为梁的轴向运动速度, $L$  为梁的长度, $P$  为轴向力, $x$  为轴向空间坐标, $x$  轴取静止梁变形前的轴线, $y(x,t)$  为梁的横向位移, $m$  为滑块质量, $v$  为滑块运动速度, $\xi$  为滑块位移。本文仅考虑运动梁的横向振动,略去高速运动梁轴向位移对横向振动的影响。根据 Euler-Bernoulli 梁模型和 Newton 第二定律,移动质量作用下轴向运动梁的控制方程为

$$\rho A(y_{,tt} + 2uy_{,xt} + u^2 y_{,xx}) - Py_{,xx} + EIy_{,xxxx} = -m(g + y_{,tt} + 2vy_{,xt} + v^2 y_{,xx}) \cdot \delta(x - \xi) \quad (1)$$

其中: $\rho$  为材料密度; $A$  为梁的横截面积; $EI$  为梁抗弯刚度; $\delta$  为 Dirac 函数,逗号表示对其后面的变量求偏导。

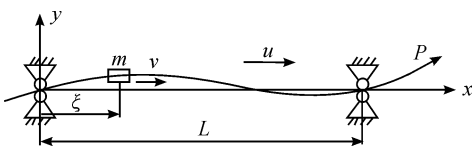


图 1 移动质量-轴向运动梁振动力学模型

简支梁边界条件和初始条件为

$$\begin{aligned} y(0,t) &= y(L,t) = 0 \\ y_{,xx}(0,t) &= y_{,xx}(L,t) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$y(x,0) = \alpha(x), y_{,t}(x,0) = \beta(x) \quad (3)$$

## 2 数值方法

为了使连续介质系统运动方程(1)化为有限维的形式,采用 Galerkin 截断法离散控制方程。取两端铰支静止梁的前  $N$  阶模态  $\phi_i(x)$  作为试函数,这样边界条件(2)自动满足,方便了后面的 Galerkin 截断处理。方程(1)的解可表示为如下形式

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \eta_i(t) \quad (4)$$

$$\phi_i(x) = \sin(i\pi x) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

其中, $\eta_i(t)$  为待定系数,式(4)写成矩阵形式

$$y(x,t) = \phi^T \cdot \eta \quad (6)$$

将式(6)代入方程(1),两边左乘  $\phi(x)$ ,并对梁全长  $L$  积分,注意试函数的正交性,最后按  $\eta$  整理得

$$M(t) \ddot{\eta}(t) + C(t) \dot{\eta}(t) + K(t) \eta(t) = F(t) \quad (7)$$

式中: $M$  为质量矩阵; $C$  为阻尼矩阵; $K$  为刚度矩阵; $F$  为载荷向量。各系数矩阵表达式为:

$$M = \int_0^L \rho A \phi \phi^T dx + m \phi(\xi) \phi^T(\xi) \quad (8)$$

$$C = 2 \int_0^L \rho A u \phi \phi'^T dx + 2mv \phi(\xi) \phi'^T(\xi) \quad (9)$$

$$K = \int_0^L \rho A (u^2 - P) \phi \phi''^T dx + \int_0^L EI \phi'' \phi''^T dx + mv^2 \phi(\xi) \phi''^T(\xi) \quad (10)$$

$$F = -mg \phi(\xi) \quad (11)$$

采用 Newmark- $\beta$  法直接积分求解时变系数方程(7),利用 Matlab 语言编写计算程序。

## 3 数值结果

为了验证模型和数值方法的可靠性,分别以文献[5]中移动质量作用下无轴向运动简支梁动态响应和文献[7]中轴向运动简支梁自由振动为算例,计算所需参数如表 1 所示。文献[5]是考虑移动载荷惯性力影响,基于有限元法建立具有附加系数矩阵的时变动力学模型,求解得到的结果,在本文中作为梁无轴向运动的对比算例。文献[7]采用有限差分法计算轴向运动梁的振动响应,在本文中作为轴向运动梁自由振动的对比算例。算例 1 和算例 2 中梁的初始横向速度为零,初始横向位移为:

$$\alpha_1(x) = 0 \quad (12)$$

$$\alpha_2(x) = 0.064x^3(1-x)^3 \quad (13)$$

在执行算例 1 时只需在模型和算法中令梁的轴向速度为零,执行算例 2 时只需令移动质量为零。

表1 算例参数

算例	滑块质量 $m/\text{kg}$	滑块速度 $v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	梁长 $L/\text{m}$	梁线密度 $\rho A/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	梁抗弯刚度 $EI/P_a \text{m}^4$	梁轴向速度 $u/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	轴向力 $P/\text{N}$
1	1.2	10	1	1	275.2	0	0
2	0	0	1	0.157	1.4	10	7 850

图2为采用算例1参数计算得到的移动质量作用下简支梁跨中挠度响应曲线,挠度峰值为1.189 mm,文献[5]中计算的挠度峰值为1.18 mm,相对误差为0.7%。图3(a)为根据算例2计算得到的轴向运动梁跨中无量纲挠度响应曲线,振幅为0.001,图3(b)是挠度曲线的频谱分析结果,一阶主振频为111.8 Hz,与文献[7]计算结果一致。由上述两个算例可以看出,本文建立的模型和数值方法是可靠的。

下面在算例2的基础上研究移动质量速度对轴向运动简支梁振动响应的影响,梁的轴向运动速度为10 m/s。设滑块的质量为1.2 kg,考察滑块的3种运动速度,即分别以小于、等于和大于梁轴向速度进行滑动。3组速度分别取为5 m/s,10 m/s和20 m/s,计算移动质量作用期间简支梁动态响应,即仿真总时间取为滑块在梁上的滑动时间,跨中挠度曲线及其FFT频谱分析如图4~图6所示。

由前文算例2结果可知,无移动质量作用时梁的前两阶模态被激起,梁作周期性有规律的自由振动,而由图4~图6可知,加载移动质量后梁的振动无明显的规律性,振动幅值

减小,振动频率比梁自由振动丰富,说明移动质量使更多的振频被激起。由图4~图6的时域响应还可发现,在移动质量作用前半阶段,梁的振动频率较低,而后半阶段振动频率较高,同时由频域响应可看出移动质量速度越小,频域成分越丰富。

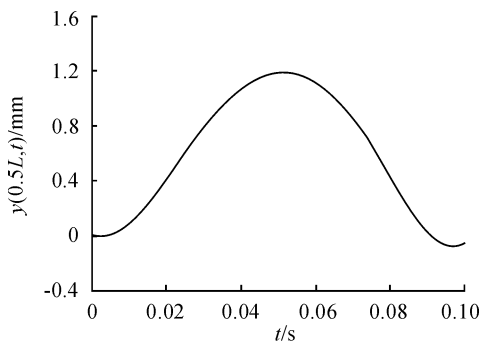
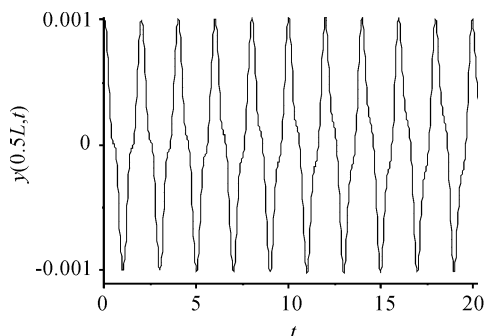
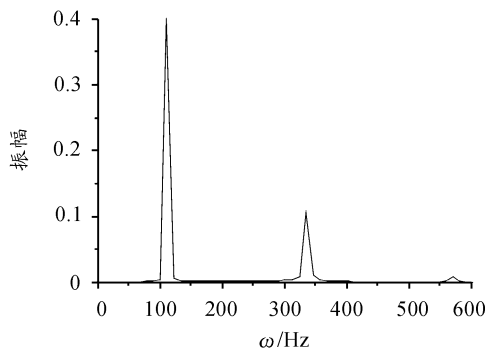


图2 算例1 梁跨中挠度曲线

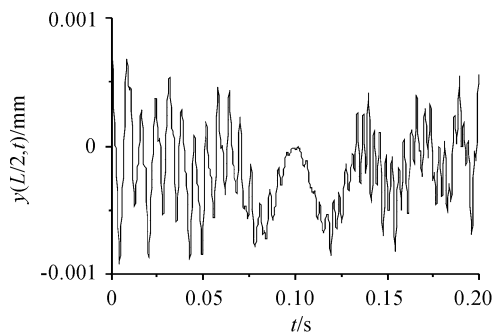


(a) 挠度曲线

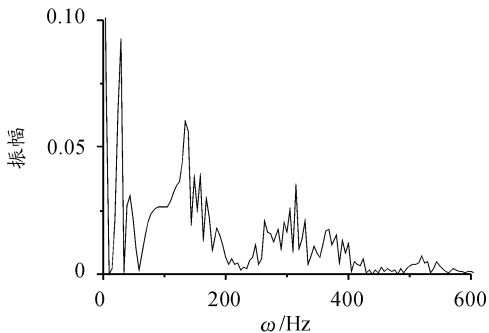


(b) FFT分析

图3 算例2 梁跨中挠度曲线及频谱分析



(a) 挠度曲线



(b) FFT分析

图4 滑块速度5 m/s时梁跨中挠度曲线及FFT分析

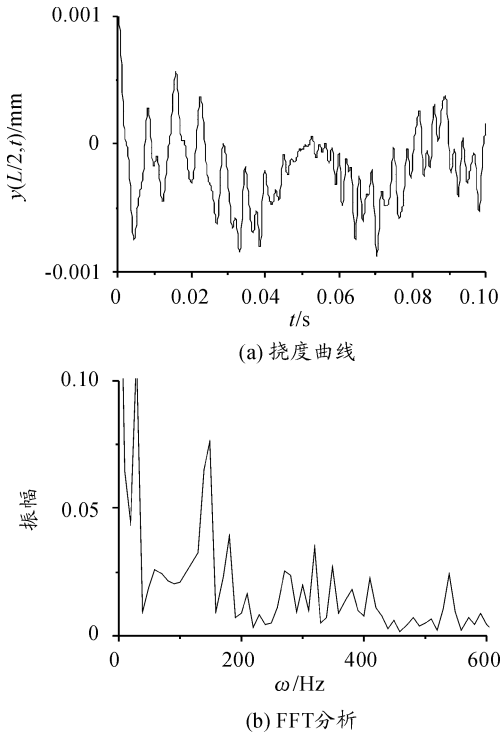


图5 滑块速度 10 m/s 时梁跨中挠度曲线及 FFT 分析

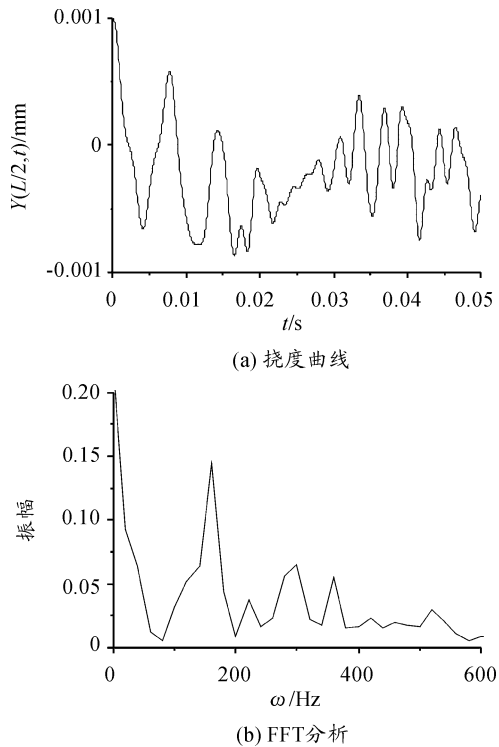


图6 滑块速度 20 m/s 时梁跨中挠度曲线及 FFT 分析

### 4 结论

目前国内外对轴向运动梁的动力学研究已得到了许多重要成果,但是这些成果大部分是基于梁自身的振动响应,考虑移动质量作用等实际工程问题较少。本文建立了移动质量作用下轴向运动梁的运动方程,通过数值方法研究了移动质量对轴向运动梁动态响应的影响,发现移动质量的作用使梁的振幅减小,梁跨中挠度曲线频谱分析表明,移动质量使梁更多的频率成分被激起,并且移动质量运动速度越小,梁的频率成分越丰富。移动质量对轴向运动梁动态响应的影响规律对实际工程问题中轴向运动系统的振动控制、测试分析具有重要的指导意义。

### 参考文献:

- [1] MICHALTSOS G T. Dynamic Behavior of a Single-Span Beam Subjected to Loads Moving with Variable Speeds[J]. Journal of Sound and Vibration,2002,258(2):359-372.
- [2] 李炜明,骆汉宾,朱宏平,等. 移动质量速度对简支梁动力响应的影响[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,2008,36(9):117-120.
- [3] 王颖泽,张小兵. 移动质量作用下膨胀波发射装置的振动响应分析[J]. 航空动力学报,2009,24(8):1714-1719.
- [4] 刘宁,杨国来. 移动质量作用下轴向运动悬臂梁振动特性分析[J]. 振动与冲击学报,2012,31(3):106-109.
- [5] WU J J, WHITTAKER A R, CARTMELL M P. Dynamic Responses of Structures to Moving Bodies Using Combined Finite Element and Analytical Methods[J]. International Journal of Mechanical Sciences 2001,43:2555-2579.
- [6] CHEN Liqun, YANG Xiaodong. Nonlinear Free Transverse Vibration of an Axially Moving Beam: Comparison of Two Models[J]. Journal of Sound and Vibration,2007,299(1):348-354.
- [7] DING Hu, CHEN Liqun. On Two Transverse Nonlinear Models of Axially Moving Beams[J]. Science in China Series E: Technological Science,2009,52(3):743-751.

(责任编辑 唐定国)